СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРАКТИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТАРШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Сборник учебно-методических материалов

УНИВЕРСИТЕТСКО-ШКОЛЬНЫЙ КЛАСТЕР

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕРМСКИЙ ФИЛИАЛ

Современные технологии в практике обучения математике старших школьников

Сборник учебно-методических материалов

Под научной редакцией
доктора педагогических наук, профессора
Е. Г. Плотниковой

Об издании — 1, 2

Редакционно-издательский отдел НИУ ВШЭ – Пермь
Пермь 2020

УДК 372.851
ББК 74.262.21
С56

Издается по решению
редакционно-издательского совета НИУ ВШЭ – Пермь

Авторский коллектив:
Андронова И. Г., Баталова Е. В.,
Галиакберова Н. Ф., Медведева С. И. (*раздел 1*)
Воронкова Н. В., Выхрыстюк С. Н.,
Гончарова И. В., Кашина Л. А. (*раздел 2*)
Глинкина И. Н., Игумина В. Н., Молодцова А. В., Покровская С. В.,
Скворцова И. В., Солодникова Т. Н., Шолохова О. А. (*раздел 3*)

С56 **Современные** технологии в практике обучения математике старших школьников [Электронный ресурс] : сб. учеб.-метод. матер. / И. Г. Андронова [и др.] ; под науч. ред. Е. Г. Плотниковой ; Пермский филиал Нац. исслед. ун-та «Высшая школа экономики». — Электрон. дан. — Пермь : Редакционно-издательский отдел НИУ ВШЭ – Пермь, 2020. — 10 Мб; 200 с. — Режим доступа: https://perm.hse.ru/editorial_publishing/education1 — Загл. с экрана. — ISBN 978-5-906482-56-3.

В сборнике представлены учебно-методические материалы, систематизирующие инновационную деятельность учителей-мультипликаторов в образовательном пространстве Университетско-школьного кластера за период с 2018 по 2020 годы.

В первом разделе сборника предложена технология уровневой дифференциации на примере организации самостоятельной работы обучающихся на уроках алгебры в 9-м классе по темам «Последовательности», «Арифметическая прогрессия», «Геометрическая прогрессия». Во втором разделе рассмотрена система подготовки обучающихся к решению геометрических задач на примере темы «Трапеция». В третьем разделе представлены практикумы по темам алгебры и начала математического анализа, изучаемым в 10–11-х классах.

Сборник адресован учителям математики, обучающимся, слушателям подготовительных курсов.

УДК 372.851
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-906482-56-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Сборник подготовлен под научной редакцией Евгении Григорьевны Плотниковой — доктора педагогических наук, профессора кафедры высшей математики НИУ ВШЭ – Пермь. Комплексы заданий разработаны и систематизированы учителями-мультипликаторами в ходе инновационной деятельности в образовательном пространстве Университетско-школьного кластера за период с 2018 по 2020 годы.

В первом разделе представлена технология уровневой дифференциации на примере организации самостоятельной работы обучающихся на уроках алгебры в 9-м классе по темам «Последовательности», «Арифметическая прогрессия», «Геометрическая прогрессия». Предлагаются самостоятельные работы, составленные в трех вариантах — в зависимости от уровня сложности заданий.

Во втором разделе рассмотрена система подготовки обучающихся к решению геометрических задач на примере темы «Трапеция», собраны и структурированы задания, решение которых позволит ученикам систематизировать знания за курс основной школы по теме «Трапеция».

Система подготовки обучающихся к решению геометрических задач состоит из трех блоков. В первом блоке представлена теория по теме «Трапеция»: рассмотрены основные определения и свойства, изучаемые в школьном курсе планиметрии, а также дополнительные свойства, необходимые для решения определенного круга задач. Второй блок содержит задачи государственной итоговой аттестации за 9-й класс, которые структурированы по применяемым свойствам. В третьем блоке представлены нестандартные (многовариантные) задачи. Ко всем задачам даются ответы.

В третьем разделе предлагаются многовариантные практикумы по следующим темам алгебры и начала математического анализа, изучаемым в 10–11-х классах: показательные уравнения, показательные неравенства, логарифмические уравнения, логарифмические неравенства, производная функции. Каждый практикум содержит: необходимые теоретические сведения, формулы; решение нулевого варианта с методическими указаниями и рекомендациями; 20 вариантов наборов заданий для самостоятельного решения с ответами.

В данном разделе предложен также новый подход к оценке самостоятельной работы обучающихся. В рамках рассматриваемого подхода старшеклассники, претендующие на высокий результат, с интересом вовлекаются в процесс решений.

Сборник предназначен учителям математики — в помощь при организации учебного процесса и самостоятельной работы обучающихся. При выполнении предлагаемых заданий школьники смогут актуализировать полученные знания, отработать умения и навыки решения задач.

РАЗДЕЛ 1

Технология уровневой дифференциации

1.1

Уровневая дифференциация в обучении математике школьников

Сегодня в российской образовательной системе все большую популярность приобретает личностно-ориентированное обучение, которое основывается на учете индивидуальных особенностей обучающегося, его субъектного опыта, ценностных установок, потенциальных возможностей в приобретении знаний. У обучающихся разная степень интереса к изучаемому предмету, у них отличаются способности, не каждый из них может проявить собственное «Я». Личностно-ориентированное обучение нацелено на то, чтобы помочь обучающимся создать для себя на уроке «ситуацию успеха».

В обучении математике личностно-ориентированный подход реализуется через уровневую дифференциацию заданий. Разноуровневые дидактические материалы позволяют ученикам самостоятельно выбрать доступные для решения задания и тем самым дают возможность учителю создать на уроке комфортную обстановку. Кроме того, они помогают выявить не только определенные знания обучающихся по теме, но и проверить их усвоение в комплексе, прогнозировать результаты обучения, создают возможность для творческого применения знаний, мотивируют на самосовершенствование.

В настоящее время разноуровневый подход в обучении решению математических задач рассматривается прежде всего как средство реализации профильного обучения, построения «индивидуального образовательного маршрута». Внедрение технологии разноуровневого обучения предполагает для каждого обучающегося достижение базового уровня знаний и в то же время реализацию своих способностей на более высоком уровне, что соответствует требованиям ФГОС ООО.

Уровневая дифференциация на уроках математики предполагает, что школьники, обучаясь в одном классе, по одной программе и одному учебнику, могут усвоить материал на различных уровнях. Определяющим при этом является уровень обязательной подготовки: его достижение свидетельствует о выполнении учеником минимально необходимых требований по усвоению содержания. На основе базового формируются более высокие уровни овладения материалом.

Существует ряд условий, выполнение которых необходимо для успешного и эффективного осуществления уровневой дифференциации.

Во-первых, обучающиеся должны иметь представление об уровнях усвоения материала, в первую очередь — о базовом. Определение и постановка конкретных целей активизируют познавательную деятельность школьников. Если цели известны и посильны, а их достижение поощряется, то для обучающихся естественно стремление их реализовать. Таким образом, формируются положительные мотивы обучения, сознательное отношение к учебной работе.

Во-вторых, необходимо наличие определенных «ножниц» между уровнем требований и уровнем обучения. Первый должен быть существенно выше, иначе и уровень обязательной подготовки не будет достигнут, а обучающиеся, потенциально способные усвоить больше, не будут двигаться дальше.

В-третьих, образовательный процесс должен обеспечивать последовательность в продвижении ученика по уровням. Это означает, что в ходе обучения не следует предъявлять высокие требования к тем обучающимся, которые не достигли уровня обязательной подготовки. Трудности в учебной работе должны быть посильными и соответствующими индивидуальному темпу овладения материалом. В то же время «сильных» учеников не следует задерживать на этапе овладения основными знаниями и умениями.

В-четвертых, обучающимся необходимо дать возможность выбирать уровень получения знаний. То есть каждый ученик имеет право добровольно и сознательно решать для себя, на каком уровне ему усваивать материал.

На практике разноуровневое обучение целесообразно начинать с обучающимися 7–9-х классов, поскольку именно в этот период у школьников начинают проявляться выраженные способности к отдельным предметам.

В ходе разноуровневого обучения оцениваются не столько результаты, достигнутые обучающимися, сколько его усилия. Результатом выступает базовый уровень, определенный образовательным стандартом по всем предметам школьного цикла. Если обучающийся успешно достигает определенного стандартом уровня знаний, умений, навыков, то получает соответствующие отметки. Если же обучающийся претендует на более высокий уровень, то к его знаниям, умениям и навыкам предъявляются и более высокие требования. Следовательно, чтобы добиться лучших результатов, школьнику потребуется приложить больше усилий, но в соответствии с его способностями. Если учитель будет оценивать не приложенные усилия, а уровень полученных знаний (на базовом уровне и в сравнении с «сильными» обучающимися), то у «средних» и «слабых» учеников практически нет стимула стремиться к достижению лучшего результата. И это надо обязательно учитывать.

Работа учителя при организации разноуровневых групп состоит в делении обучающихся на три группы (по уровню знаний, способностям), разработке или подборке заданий согласно выявленным уровням знаний, оценивании их деятельности.

Применение дифференцированного обучения на первом уровне позволяет:

- пробудить у обучающихся интерес к предмету за счет использования заданий базового уровня, ориентированных на работу с учетом индивидуальных способностей;
- ликвидировать «пробелы» в знаниях и умениях обучающихся;
- сформировать умение самостоятельной деятельности по образцу.

На втором уровне дифференцированное обучение дает возможность:

- сформировать устойчивый интерес к предмету;
- закрепить имеющиеся знания, повторить определенные способы действия;
- актуализировать имеющиеся знания для успешного изучения нового материала;
- развить умение самостоятельной работы над заданием, проектом.

Использование дифференцированного обучения на третьем уровне помогает:

- развивать устойчивый интерес к предмету;
- формировать умения выполнять задания повышенной сложности и использовать новые способы;
- развивать воображение, ассоциативное мышление, раскрывать творческие возможности.

Далее технология уровневой дифференциации рассмотрена на примере организации самостоятельной работы обучающихся на уроках алгебры в 9-м классе по темам «Последовательности», «Арифметическая прогрессия», «Геометрическая прогрессия». Самостоятельные работы составлены в трех вариантах. Они отличаются по уровню сложности заданий.

Вариант 1 рассчитан на слабо подготовленных обучающихся и ориентирован на достижение ими обязательного базового уровня математической подготовки, определенного ФГОС ООО. Некоторые задания сопровождаются ответами, указаниями, образцами решений, пошаговыми инструкциями, а также данными для самоконтроля.

Вариант 2 несколько усложнен по сравнению с первым вариантом. Он не только способствует достижению обучающимися уровня обязательной подготовки, но и создает условия для овладения алгебраическими методами на более высоком уровне.

Вариант 3 рассчитан на обучающихся с хорошей математической подготовкой и подразумевает свободное применение полученных знаний и умений, творческий подход, проявление смекалки и сообразительности.

Учитель определяет, по какому варианту работать каждому обучающемуся, причем в процессе изучения темы ученик может переходить с одного варианта на другой. Самостоятельные работы достаточно объемны. Их можно использовать несколько раз, разделяя задания.

В данном разделе использовались материалы из следующих источников: [Баранова, 2016; Мерзляк и др., 2016, 2017; Мордкович, Александрова, 2015; Перевозный, 2010; Суворова, 2015; Ященко, Шестаков, 2017а].

1.2

Варианты разноуровневых самостоятельных работ по теме «Последовательности. Арифметическая прогрессия»

Вариант 1

Последовательности

1. Выпишите первые пять членов последовательности:

а) нечетных чисел, взятых в порядке возрастания;

б) правильных дробей с числителем 1, взятых в порядке убывания.

2. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = 0{,}5n - 2$. Найдите a_n, a_4, a_{100}, a_{k+1}.

Ответ: $a_{k+1} = 0,\ 5k - 1{,}5$.

3. Выпишите первые пять членов последовательности (a_n), заданной формулой n-го члена:

а) $a_n = 3n - 2$ б) $n = (n+1)$ в) $a_n = \dfrac{1}{n}$

4. Выпишите первые пять членов последовательности (a_n) чисел, кратных 5, взятых в порядке возрастания, и задайте эту последовательность формулой n-го члена.

5. Выпишите первые пять членов последовательности (b_n), если

а) $b_1 = 2,\ b_{n+1} = b_n + 5$ б) $b_1 = 4,\ b_{n+1} = 2b_n$

6. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = 6n - 4$. Является ли данное число членом этой последовательности? Если да, то какой номер этого члена?

а) 14 б) 26 в) −16

Ответ: а) да, $n = 3$; б) да, $n = 5$; в) нет.

7. Укажите номера отрицательных членов последовательности (a_n), где $a_n = 3n - 16$, и вычислите эти члены.

Указание. Для решения рассмотрите неравенство $3n - 16 < 0$ и найдите натуральные числа, удовлетворяющие этому неравенству.

Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

1. В арифметической прогрессии (a_n) известны $a_1 = -3{,}4$ и $d = 3$. Найдите:

а) a_3 б) a_{11} в) a_{n+1}

Ответ: а) 8,6; б) 26,6; в) $-3{,}4 + 3n$.

2. Тело в первую минуту прошло 5 м, а в каждую последующую проходило на 0,5 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние прошло тело за шестую минуту?

Ответ: 7,5 м.

3. Найдите члены арифметической прогрессии −6; −4; a_3; a_4; a_5; a_6; ...

4. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия. Найдите d, если известно, что $c_1 = 4$, $c_{15} = 48$.

Ответ: $d = 3\frac{1}{7}$.

5. Встретится ли среди членов арифметической прогрессии 14; 17; 20; ... данное число? Если да, то на каком месте оно будет записано?

а) 50 б) 78 в) 104

Ответ: а) да, n = 13; б) нет; в) да, n = 31.

6. Чему равен первый положительный член арифметической прогрессии −22; −20; −18; ... ?

Указание. Для ответа на вопрос задачи решите неравенство $-22+2(n-1)>0$.

Ответ: $a_{13} = 2$ — первый положительный член прогрессии.

Формула суммы первых *n* членов арифметической прогрессии

1. Найдите сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, в которой

а) $a_1 = 6$, $d = 4$ б) $a_1 = 12$, $d = -3$

Указание. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ сначала найдите a_{16}.

Ответ: а) 376; б) −168.

2. Найдите сумму первых n членов арифметической прогрессии 1,6; 1,4; … , если n равно:

а) 6 б) 11 в) 40

Ответ: а) 6,6; б) 3,6; в) −96.

3. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии (a_n), в которой

а) $a_1 = 6,\ a_7 = 26$ б) $a_1 = -8,\ a_7 = 1$

Ответ: а) 160; б) 20.

4. В январе мастерская изготовила 106 деталей, а в каждый следующий месяц — на 3 детали больше, чем в предыдущий. Сколько деталей изготовила мастерская в ноябре? Сколько всего деталей изготовила мастерская за год?

Ответ: 139 деталей; 1470 деталей.

5. Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = 2{,}5n,$ является арифметической прогрессией, и найдите сумму первых двадцати ее членов.

Указание. Найдите a_{n+1}, покажите, что разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n.

Ответ: 195.

6. Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 3.

Указание. Найти число членов последовательности 12; 15; … ; 99 можно с помощью формулы $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Ответ: 1665.

Вариант 2

Последовательности

1. Выпишите первые пять членов последовательности:

а) натуральных чисел, дающих при делении на 4 остаток 1;

б) приближенных значений дроби $\frac{1}{6}$, взятых с недостатком с точностью до 1,1; 0,01; 0,001 и т.д.

2. Последовательность (c_n) задана формулой $c_n = -n^2 + 2$. Найдите c_1, c_6, c_{20}, c_{k+1}.

3. Выпишите первые пять членов последовательности (a_n), заданной формулой n-го члена:

а) $a_n = 5 - 2n$ б) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ в) $a_n = \frac{1}{n}$

4. Выпишите первые пять членов последовательности (b_n) обыкновенных дробей, взятых в порядке возрастания, у которых знаменатель на 1 больше числителя. Задайте эту последовательность формулой n-го члена.

5. Выпишите первые пять членов последовательности (b_n), если

а) $b_1 = -3,\ b_{n+1} = b_n - 1$ б) $b_1 = 3,\ b_2 = 5,\ b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$

6. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = n^2 - n$. Является ли данное число членом этой последовательности? Если да, то каков номер этого члена?

а) 24 б) 6 в) 12

Ответ: а) нет; б) да, $n = 3$; в) да, $n = 4$.

7. Укажите номера отрицательных членов последовательности (a_n), где $a_n = n^2 - 36$, и вычислите эти члены.

Указание. Решите неравенство $n^2 - 36 < 0$ и найдите натуральные числа, удовлетворяющие этому неравенству.

Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

1. Найдите члены арифметической прогрессии, обозначенной буквами: 3; a_2; a_3; 18; a_5; a_6; …

2. Известно, что (a_n) — арифметическая прогрессия. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) $12a_1;\ 12a_2;\ \ldots;\ 12a_n;\ \ldots$ б) $2a_1 + 1;\ 2a_2 + 1;\ \ldots;\ 2a_n + 1;\ \ldots$

3. В арифметической прогрессии (b_n) известны $b_1 = 17,5$ и $d = -3,5$. Является ли данное число членом прогрессии? Если да, то каков номер этого члена?

а) 21 б) 7 в) 49

4. В арифметической прогрессии (c_n) известны $c_7 = -6$ и $c_{11} = -12$. Найдите c_1 и d.

Ответ: $c_1 = 3$; $d = 1,5$.

5. Между числами 2 и 37 вставьте четыре числа, которые вместе с данными числами составляют арифметическую прогрессию.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $c_6 = 37$.

6. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 135; 125; 115; … .

Ответ: $a_{15} = -5$.

Формула суммы первых *n* членов арифметической прогрессии

1. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, в которой

а) $a_1 = 16,5,\ d = -1,5$ б) $a_1 = 12\sqrt{3},\ d = -\sqrt{3}$

2. Тело в первую секунду прошло 16 м, а в каждую следующую — на 3 м больше, чем в предыдущую. Какой путь прошло тело за 7 секунд?

Ответ: 175 м.

3. Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = 5 + 2n$, определяет арифметическую прогрессию. Найдите сумму ее первых двадцати членов.

4. Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 4.

5. В арифметической прогрессии $\frac{a_1}{a_2}=5$, а сумма первых восьми членов равна 120. Найдите первый член и разность прогрессии.

Ответ: $a_1=1,\ d=4.$

6. В арифметической прогрессии $S_4=42$ и $S_8=132$. Найдите a_1 и d.

Указание. При решении воспользуйтесь формулой $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n.$

Ответ: $a_1=6,\ d=3.$

Вариант 3

Последовательности

1. Выпишите первые пять членов последовательности a_1, в которой член a_n равен остатку от деления n на 4.

2. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена: $a_n=(-1)^n n^2-1$. Найдите a_1, a_5, a_{12}, a_{k+1}.

3. Выпишите первые пять членов последовательности (b_n) натуральных чисел, дающих при делении на 5 остаток 2. Задайте эту последовательность формулой n-го члена.

4. Задайте формулой n-го члена последовательность (c_n), если известно, что

а) $c_1=5,\ c_{n+1}=c_n+4$ б) $c_1=4,\ c_{n+1}=3c_n$

5. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n=n^2-7n+6$. Является ли данное число членом этой последовательности? Если да, то каков номер этого члена?

а) 6 б) −16 в) 20

6. Укажите номера отрицательных членов последовательности (a_n), где $a_n = n^2 - 12n + 20$. Вычислите эти члены.

Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

1. Найдите члены арифметической прогрессии a_1; a_2; 7; a_4; a_5; 13; a_7; …

2. Известно, что (a_n) — арифметическая прогрессия. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) a_1; a_3; a_5; … ; a_{2n-1}; …

б) $a_1 + 1$; $a_2 + 2$; $a_3 + 3$; … ; $a_n + n$; …

3. Между числами 27 и 63 вставьте пять чисел, составляющих вместе с данными числами арифметическую прогрессию.

4. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 17,2; 13,2; 9,2; … .

5. В арифметической прогрессии $\frac{a_6}{a_2} = \frac{5}{3}$. Докажите, что $a_{10} = 2a_3$.

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

1. Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{4n-1}{5}$, является арифметической прогрессией. Найдите сумму ее первых шестнадцати членов.

2. Из пункта А выехал велосипедист со скоростью 24 км/ч. Спустя 2 часа вслед ему отправился мотоциклист, который в первый час проехал 18 км, а в каждый следующий — на 2 км больше, чем в предыдущий. Сколько часов потребуется мотоциклисту, чтобы догнать велосипедиста?

3. Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 7.

4. В арифметической прогрессии $\frac{a_2}{a_6} = -5$, а сумма первых семи членов равна 28. Найдите первый член и разность прогрессии.

5. Решите уравнение, в котором слагаемые в сумме, записанной в левой части, составляют арифметическую прогрессию:

а) $4 + 7 + 10 + \ldots + x = 116$ б) $26 + 24 + 22 + \ldots + x = 126$

Ответ: а) $x = 25$; б) $x = 16$.

6. Является ли арифметической прогрессией последовательность, сумма первых n членов которой вычисляется по формуле:

а) $S_n = 3n^2$ б) $S_n = n^2 - 4n$

1.3

Варианты разноуровневых самостоятельных работ по теме «Последовательности. Геометрическая прогрессия»

Вариант 1

Формула n-го члена геометрической прогрессии

1. Найдите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 6$, $q = 2$.

Ответ: 6, 12, 24, 48, 96.

2. Найдите b_1 и q для геометрической прогрессии (b_n), заданной следующими условиями: $b_2 = 8$, $b_3 = -32$.

Указание. Вспомните определение геометрической прогрессии. Какое число называют знаменателем геометрической прогрессии?

Ответ: $q = -4$, $b_1 = -2$.

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 7$, $b_4 = 448$.

Ответ: $q = 4$.

4. Зная формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_n = 5^{n-1}$, определите b_1 и q.

Ответ: $b_1 = 5^0 = 1$, $q = 5$.

5. Составьте формулу n-го члена геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 3$, $q = 2$.

Ответ: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

6. Дана конечная геометрическая прогрессия $b_n = 3^9$, $b_1 = 1$, $q = 3$. Найдите номер n-го члена геометрической прогрессии.

Ответ: $n = 10$.

Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии

1. Найдите сумму первых трех членов геометрической прогрессии, если $c_1 = 4$, $q = 3$.

Ответ: 52.

2. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии 3; –6; ...

Ответ: –63.

3. В геометрической прогрессии $S_6 = 315$, $q = 2$. Найдите первый член прогрессии (b_n).

Указание. Запишите формулу для вычисления S_6. Подставьте в формулу все известные величины и найдите b_1.

Ответ: 5.

4. В первый год Великой Отечественной войны погибло около 1,8 миллионов советских граждан. С каждым годом это количество увеличивалось в два раза. Сколько советских граждан погибло в годы Великой Отечественной войны?

Ответ: 27 миллионов.

5. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_2 = 6$ и $b_4 = 54$, если известно, что все ее члены положительны.

Указание. Найдите b_3, используя характеристическое свойство (квадрат любого члена геометрической прогрессии начиная со второго равен произведению предыдущего и последующего ее членов). Найдите знаменатель геометрической прогрессии и первый член. Используя формулу для вычисления суммы первых n членов геометрической прогрессии, ответьте на вопрос задачи.

Ответ: 2186.

Вариант 2

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

1. Дана геометрическая прогрессия 2; 22; ... . Запишите формулу ее n-го члена.

2. Геометрическая прогрессия задана условием $b_n = (-4)^n$. Какое из чисел не является членом этой прогрессии?

а) 16 б) −1024 в) −64 г) −256

Ответ: г) −256.

3. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите q, если $x_3 = -162$, $x_5 = -18$.

Указание. Найдите x_4, используя характеристическое свойство, затем ответьте на вопрос задачи.

4. Между числами 18 и 2 вставьте положительное число так, чтобы получились три последовательных члена геометрической прогрессии.

Ответ: 6.

5. Является ли число 63 членом геометрической прогрессии (b_n), заданной формулой n-го члена $b_n = \frac{7}{9} \cdot 3^{n-8}$. Если да, то в ответе укажите его номер.

Ответ: является, $n = 12$.

6. Клиент взял в банке кредит в размере 50 000 рублей на 5 лет под 20% годовых. Какую сумму он должен вернуть в банк в конце срока, если весь кредит с процентами возвращается в банк в конце срока?

Указание. Через год сумма вырастет на 20% и составит 120%. Переведите 120% в обыкновенную дробь — это знаменатель геометрической прогрессии. Воспользуйтесь формулой n-го члена геометрической прогрессии.

Ответ: 124 416 рублей.

Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии

1. Найдите сумму первых четырех членов геометрической прогрессии 1; 3; 32; … .

Ответ: 40.

2. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 32,\ q = \frac{1}{2}$.

Ответ: 62.

3. Найдите S_5 для геометрической прогрессии (b_n), если $b_7 = 8$ и $b_9 = 32(q < 0)$.

Указание. Найдите b_8, используя характеристическое свойство геометрической прогрессии. Затем найдите знаменатель геометрической прогрессии и ее первый член. Ответьте на вопрос задачи.

Ответ: 1,375.

4. Докажите, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, и найдите сумму n первых ее членов, если $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Указание. Для доказательства воспользуйтесь определением геометрической прогрессии. Найдите первые два члена прогрессии и покажите, что выполняется условие: каждый следующий равен предыдущему, умноженному на одно и то же число. Далее воспользуйтесь формулой для вычисления суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Ответ: $S_n = 3 \cdot \left(2^n - 1\right)$.

5. Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.

Указание. Сколько бактерий было первоначально? Это первый член геометрической прогрессии. Каждые 20 минут бактерия делится на две, значит, знаменатель геометрической прогрессии равен ... . Найдите значение n, вычислив, сколько раз содержится в сутках по 20 минут.

Ответ: $2^{72} - 1$.

Вариант 3

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

1. В геометрической прогрессии (c_n): $c_4 = \sqrt{5}$, $c_7 = -25$. Найдите знаменатель прогрессии (c_n).

2. Геометрическая прогрессия состоит из четырех членов: $2, a, b, \frac{1}{4}$. Найдите a и b.

3. Найдите значение выражения $\frac{b_2 \cdot b_{32} + b_4 \cdot b_{30} + b_6 \cdot b_{28}}{20 \cdot b_{17}^2}$, если известно, что числовая последовательность (b_n) является геометрической прогрессией.

4. На опытном участке леса ежегодный прирост древесины составляет 10%. Какое количество древесины будет на этом участке через 6 лет, если первоначальное количество древесины равно $2{,}0 \cdot 10^4$ м^3?

5. В правильный треугольник со стороной 32 см последовательно вписывают треугольники. Вершины каждого последующего треугольника являются серединами сторон предыдущего треугольника. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии

1. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии, если $b_5 = \frac{16}{9}$, $q = \frac{2}{3}$.

2. Каждое простейшее одноклеточное животное инфузория туфелька размножается делением на 2 части. Сколько инфузорий стало после шестикратного деления, если первоначально их было 1000?

3. Найдите сумму квадратов первых шести членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 3$, $q = \sqrt{2}$.

4. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, сумма первых двух членов равна 8, а сумма третьего и четвертого членов равна 72. Сколько членов этой прогрессии начиная с первого надо сложить, чтобы получить в сумме 242?

5. Однажды богач заключил выгодную, как ему казалось, сделку с человеком, который целый месяц ежедневно должен был приносить по 100 000 рублей, а взамен в первый день месяца богач должен был отдать 1 копейку, во второй — 2 копейки, в третий — 4 копейки, в четвертый — 8 копеек и т.д. в течение 30 дней. Сколько денег получил богач и сколько он отдал? Кто выиграл от этой сделки?

Вариант 1

Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена

1. Составьте формулу n-го члена геометрической прогрессии 5; −10; … .

2. Найдите четыре первых члена геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 4$, а знаменатель $q = -3$.

3. Найдите седьмой член геометрической прогрессии −2; 4; −8; … .

4. Найдите первый член геометрической прогрессии (x_n), если $x_4 = -54$, $q = -3$.

5. Найдите q и шестой член геометрической прогрессии 72; 12; 2; … .

Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

1. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n), если

а) $b_1 = -1$, $q = 3$ б) $b_1 = -4$, $q = 0{,}5$

2. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии 16; 24; 36; … .

3. Найдите первый член геометрической прогрессии, если $S_4 = 15$, $q = 0{,}5$.

4. Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = \frac{5}{2^n}$. Найдите сумму S_6.

5. Найдите сумму четырех первых членов геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q, если $b_4 = 125$, $q = 2{,}5$.

Вариант 2

Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена

1. Найдите седьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = \frac{1}{9}$, $q = -\sqrt{3}$.

2. Найдите четыре числа, которые образуют геометрическую прогрессию, если сумма первого и третьего равна 35, а сумма второго и четвертого равна -70. В ответе запишите сумму $4b_1 + 3b_2 + 2b_3 + b_4$.

3. Определите, принадлежит ли число $\frac{3750}{243}$ последовательности 2; $\frac{10}{3}$; $\frac{50}{9}$; … . Если да, найдите его номер.

4. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_8 = 25b_6$ и $b_2 + b_4 = -520$.

5. Какие три числа надо вставить между числами 1 и 256, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию? В ответе запишите произведение этих трех чисел.

Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

1. Найдите сумму четырех первых членов геометрической прогрессии (b_n), если

а) $b_6 = 4$, $q = 2$ б) $b_1 = \sqrt{3}$, $b_5 = 9\sqrt{3}$, $q > 0$.

2. Найдите первый член геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен 0,25, а сумма четырех первых членов равна 765.

3. Найдите количество членов конечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -8$, знаменатель $q = 3$, а сумма всех членов $S_n = -2912$.

4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если $S_4 = 30,\ S_2 = 24.$

5. Найдите $b_1,\ q, n,$ если $b_1 + b_5 = 17,\ b_2 + b_6 = 34,\ S_n = 31.$

Вариант 3

Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена

1. Найдите шестой и n-й члены геометрической прогрессии (b_n), если

а) $b_1 = 8b_4,\ b_5 = \frac{3}{16}$ б) $b_2 = 27b_5,\ b_4 = \frac{4}{3}$

2. Какие три числа надо вставить между числами 81 и 625, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию? В ответе запишите произведение этих трех чисел.

3. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 15. Найдите последнее из этих чисел, если известно, что, увеличив второе число на 1, а третье на 3, мы получим геометрическую прогрессию.

4. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если

а) $b_6 = 4b_4$ и $b_2 + b_5 = 108$

б) $b_3 + b_6 = 420$ и $b_4 - b_5 + b_6 = 315$

5. При каком значении x значения $x - 1,\ 1 - 2x$ и $x + 7$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

1. Найдите первый член геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен $\frac{1}{3}$, а сумма пяти первых членов равна $\frac{40}{9}$.

2. Найдите количество членов конечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -9$, $q = -2$, сумма всех членов $S_n = -99$.

3. Сумма второго и третьего членов геометрической прогрессии равна 30, а разность четвертого и второго членов равна 90. Найдите сумму пяти первых членов прогрессии.

4. Найдите первый член, знаменатель и количество членов конечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_4 - b_2 = -24$, $b_3 + b_2 = 6$, а сумма всех членов $S_n = -182$.

5. Сумма первых 100 членов некоторой геометрической прогрессии в 5 раз больше суммы квадратов первых 50 членов этой же прогрессии. Найдите знаменатель прогрессии, если второй ее член равен 18.

Вариант 1

Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена

1. Найдите первые шесть членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 2$, $q = 2$.

2. Найдите $b_4 - b_1$, если $b_2 = 12$, $q = 0{,}5$.

3. В геометрической прогрессии $b_1 = 729$, $q = \frac{1}{3}$. Определите b_7.

4. Определите номер подчеркнутого элемента геометрической прогрессии:

а) $\{4,\ 12,\ \dots,\ \underline{324},\ \dots\}$

б) $\{-1,\ 2,\ -4,\ 8,\ \dots,\ \underline{128},\ \dots\}$

в) $\{6,\ 12,\ 24,\ \dots,\ \underline{192},\ \dots\}$

5. Определите знаменатель q геометрической прогрессии, для которой

а) $b_1 = 5$, $b_4 = -40$ б) $b_1 = -5$, $b_5 = 25$ в) $b_1 = 1/2$, $b_6 = 16$

6.

а) Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии …; 64; x; 4; –1; … . Найдите x.

б) Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии …; 150; x; 6; 1,2; … . Найдите x.

в) Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии …; 56; x; 14; –7; … . Найдите x.

7.

а) Выписаны первые три члена геометрической прогрессии 100; 20; 4; … . Найдите ее пятый член.

б) Выписаны первые три члена геометрической прогрессии –175; –140; –112; … . Найдите ее четвертый член.

в) Выписаны первые три члена геометрической прогрессии –6; –21; –73,5; … . Найдите ее шестой член.

8. Каждое простейшее одноклеточное животное инфузория туфелька размножается делением на 2 части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 320?

Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии

1.

а) Выписаны первые три члена геометрической прогрессии –1250; –250; –50; … . Найдите сумму первых шести ее членов.

б) Выписаны первые три члена геометрической прогрессии –0,4; 2; –10; … . Найдите сумму первых пяти ее членов.

в) Выписаны первые три члена геометрической прогрессии 1512; –252; 42; … . Найдите сумму первых четырех ее членов.

2. Найдите:

а) b_3, если $S_5 = 93,\ q = 2$

б) S_5, если $b_1 = \frac{1}{2},\ b_4 = 4$

в) b_3, если $S_3 = 1{,}2,\ q = -\frac{1}{2}$

3. Найдите S_5, если $b_4 = 9$, $b_5 = 27$.

4. Сколько надо взять последовательных натуральных чисел, кратных 3, начиная с 3, чтобы их сумма была равна 165?

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

1. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots$ б) $2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \ldots$

в) $10;\ 1;\ 0{,}1;\ \ldots$ г) $1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \ldots$

д) $\frac{8}{9};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ \ldots$ е) $5;\ 0{,}5;\ 0{,}05;\ \ldots$

2. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если второй ее член равен 2, а сумма прогрессии равна 8.

3. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма равна 4,5, а первый член 3.

4. 10; –8; ... — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Найдите S.

5. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 18, $q = -\frac{5}{9}$. Найдите b_1 и b_2.

Смешанные задачи на прогрессии

1. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 3. В геометрической первый член равен 5, разность $\sqrt{2}$. Сравните сумму первых семи членов арифметической прогрессии и сумму первых шести членов геометрической прогрессии.

2. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

3. Сумма трех чисел, которые составляют арифметическую прогрессию, равна 30. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 2 и 19, то полученные числа составят возрастающую геометрическую прогрессию. Найдите разность арифметической прогрессии.

Вариант 2

Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена

1. Какие из следующих последовательностей являются геометрическими прогрессиями:

а) 12; 19; 26; ... б) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots$

в) 1; 4; 9; ... г) 1; 3; 9; ...

д) $\frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{8};\ \ldots$ е) $\sqrt{2};\ 1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ldots$

2. Геометрическая прогрессия задана формулой: $b_n = 3\cdot 2^n$; $b_n = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$; $b_n = (-3)^n$; $b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Напишите по четыре члена каждой геометрической прогрессии.

3. В геометрической прогрессии $b_6 = \frac{3}{64}$, $q = \frac{1}{2}$. Определите b_1.

4. Между числами 2 и 486 вставьте такие четыре числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию.

5. Население города составляет 10 000 человек. Ежегодный прирост населения равен 2%. Сколько населения будет в городе через 4 года?

6. Найдите b_3, если $S_3 = 219$, $b_1 b_2 b_3 = 13\ 824$.

Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии

1. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Их сумма равна 13, а сумма квадратов равна 91. Найдите эти числа.

2. Найдите сумму членов геометрической прогрессии, у которой:

а) $b_1 = 3,\ b_6 = 96,\ n = 6$ б) $b_1 = 2,\ b_5 = 162,\ n = 5$

в) $b_1 = 6,\ b_6 = 1458,\ n = 4$ г) $b_1 = -3,\ b_5 = -243,\ n = 4$

3. Найдите число членов геометрической прогрессии, у которой:

а) $b_1 = 2,\ b_n = 486,\ S_n = 729$ б) $b_1 = 3,\ b_n = 96,\ S_n = 189$

4. Найдите сумму пяти членов геометрической прогрессии, у которой:

а) $\begin{matrix} b_1 + b_3 = 5 \\ b_5 - b_1 = 15 \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} b_3 - b_1 = 3 \\ b_5 - b_1 = 15 \end{matrix}$

5. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, состоящей из 7 членов, у которых сумма первых трех членов равна 26, а сумма трех последних равна 2106.

6. Все члены геометрической прогрессии — положительные числа. Разность между третьим и вторым членами равна 18, а разность между пятым и вторым членами равна 234. Сумма скольких членов этой прогрессии равна 120?

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

1. Найдите S для бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_3 = 2,\ b_6 = \frac{1}{4}$.

2. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $6+3+1{,}5+\ldots$ б) $4-2+1-\frac{1}{2}+\ldots$

в) $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots$ г) $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots$

д) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots\left(|x|>1\right)$ е) $\frac{12}{100}+\frac{12}{10\,000}+\frac{12}{1\,000\,000}+\ldots$

3. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма четырех ее первых членов равна $1\frac{7}{8}$, а сумма прогрессии равна 2.

4. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если знаменатель ее равен $\frac{2}{9}$, а сумма прогрессии равна 10,8.

5. Сумма первого, второго и третьего членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $2\frac{5}{8}$, а сумма прогрессии равна $2\frac{2}{3}$. Найдите первый член прогрессии.

6. Решите уравнение $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots=1{,}5$, где $0<x<1$.

Смешанные задачи на прогрессии

1. Три числа, сумма которых равна 12, образуют арифметическую прогрессию. Если второе из них оставить без изменения, а первое и третье увеличить на 1, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

2. У возрастающей геометрической прогрессии сумма трех членов равна 93. Эти три числа можно рассматривать как первый, второй и седьмой члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

3. Найдите четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три составляют арифметическую прогрессию, причем сумма крайних чисел равна 32, а сумма средних чисел равна 24.

4. Числа 3, x, y составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Числа 3, $x-6$, y составляют геометрическую прогрессию. Найдите x.

5. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если вместо третьего числа поставить сумму трех чисел, а другие оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти заданные числа, если известно, что второе из них равно 6.

Вариант 3

Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена

1. Напишите формулу n-го члена геометрической прогрессии, у которой:

а) $b_1 = 32,\ q = 2$ б) $b_1 = -64,\ q = \dfrac{1}{2}$

в) $b_1 = -3,\ q = 3$ г) $b_1 = 1000,\ q = -0{,}1$

2. Дана геометрическая прогрессия, у которой

а) $b_7 : b_4 = 27$ б) $b_{11} : b_8 = 8$

в) $b_3 + b_5 = 180$ г) $b_4 + b_6 = 120$

Найдите b_1.

3. В геометрической прогрессии $b_3 = -1,\ b_6 = 3\dfrac{3}{8}$. Найдите b_1 и q.

4. В геометрической прогрессии $b_1 b_5 = 12$, $\dfrac{b_2}{b_4} = 3$. Определите b_2.

5. В геометрической прогрессии $b_1 + b_3 = 8{,}5$, $b_3 + b_5 = \frac{17}{32}$. Найдите b_1 и q.

6. Числа a, b, c, d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a + d = 10$, $a \cdot d = 7$. Найдите $b^3 + c^3$.

7. При каких значениях t числа $4t - 2$, $6 - 2t$, $6 + 2t$, $24 - 8t$ являются четырьмя членами геометрической прогрессии?

Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии

1. В геометрической прогрессии $b_4 - b_1 = 78$, $b_1 + b_2 + b_3 = 39$. Найдите S_4.

2. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма их квадратов равна 91. Найдите третий член и знаменатель прогрессии.

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем, если у нее сумма первых восемнадцати членов в пять раз больше суммы ее первых шести членов.

4. Найдите три числа, образующие последовательные члены некоторой геометрической прогрессии, если их сумма равна 21, а сумма обратных им величин равна $\frac{7}{12}$.

5. В начале каждого года вкладчик вносил на счет в банке 125 рублей. Банк ежегодно начислял на всю сумму вклада проценты по ставке 20% годовых. Сколько денег находилось на счете в конце третьего года?

6. Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1}{3}$, четвертый член прогрессии равен $\frac{1}{54}$, а сумма всех членов равна $\frac{121}{162}$. Найдите число членов прогрессии.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

1. Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,222… б) 5,555… в) 0,121212…

г) 1,181818… д) 0,2555… е)1,5333…

ж) 2,(4) з) 1,3(54)

2. Найдите сумму $4-\frac{8}{3}+\frac{16}{9}-\frac{32}{27}+\ldots+4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\ldots$

3. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=1{,}5$, $b_2^2+b_3^2+\ldots=1{,}125$. Найдите q.

4. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=192$, $b_1+b_2+b_3=189$. Найдите b_1 и q.

5. Найдите q бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член относится к сумме всех последующих как 2 к 3.

6. Решите уравнение $x^2-2x^3+4x^4-8x^5+\ldots=2x+1$, если его левая часть представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Смешанные задачи на прогрессии

1. Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если первое из них увеличить на 7, второе уменьшить на 1, а третье уменьшить в три раза, то получится геометрическая прогрессия. Если первое из исходных чисел уменьшить на 1, второе увеличить на 1, а третье умножить на $\frac{4}{3}$, то получится арифметическая прогрессия. Найдите три исходных числа.

2. Три различных числа x, y, z, сумма которых равна 52, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Одновременно эти три числа являются соответственно четвертым, шестым и двенадцатым членами арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

3. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $t > 0$; x, y, z — арифметическая прогрессия; y, z, t — геометрическая прогрессия; $x + y + z = 12$; $y + z + t = 19$. Найдите x, y, z, t.

4. Три числа, произведение которых равно 125, являются последовательными членами геометрической прогрессии и одновременно первым, третьим и шестым членами арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

5. Найдите трехзначное число по следующим условиям:

а) его цифры составляют последовательные члены геометрической прогрессии;

б) если из него вычесть 297, получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке;

в) если к цифрам данного числа прибавить соответственно 8, 5, 1, то полученные суммы станут последовательными членами арифметической прогрессии.

РАЗДЕЛ 2

Обучение решению геометрических задач на примере темы «Трапеция»

Наибольший процент нерешенных заданий на государственной итоговой аттестации в выпускных классах приходится на модуль «геометрия». Что вполне объяснимо, поскольку на изучение геометрии в школе отводится в среднем в два раза меньше времени, чем на уроки алгебры. Как результат, навыки построения и чтения чертежей у многих учеников сформированы плохо, аналитическое мышление развито не в полной мере. Вывод напрашивается сам: задания по геометрии зачастую просто игнорируются учениками.

В связи с этим возникает необходимость создания системы подготовки обучающихся к решению геометрических задач. Такая система должна способствовать накоплению опыта решения простейших задач планиметрии, а затем и более сложных, многовариантных задач в пределах учебной программы. С одной стороны, это поможет обучающимся в дальнейшем овладеть следующим разделом геометрии — стереометрией, а с другой — даст возможность качественно подготовиться к государственной итоговой аттестации.

В данном разделе рассмотрена система подготовки обучающихся к решению геометрических задач на примере темы «Трапеция». Она состоит из трех блоков. В первом блоке представлена теория по теме «Трапеция»: основные определения и свойства, изучаемые в школьном курсе планиметрии, а также свойства, не вошедшие в школьный курс планиметрии, но необходимые для решения определенного круга задач. Второй блок содержит задачи государственной итоговой аттестации за 9-й класс, структурированные по применяемым свойствам. В третьем блоке даны нестандартные (многовариантные) задачи. Учителя могут использовать задачи в практике обучения. Ко всем задачам приведены ответы.

В данном разделе использовались материалы из следующих источников: [Анатасян, 2010; Кушнир, 1993; Открытый банк заданий ОГЭ; Открытый банк заданий ЕГЭ (базовый уровень); Открытый банк заданий ЕГЭ (профильный уровень); Ященко, Шестаков, 2017а, 2017б].

2.1

Теоретический блок системы подготовки обучающихся к решению геометрических задач на примере темы «Трапеция»

Определения

Трапеция (*древнегреч.* τράπεζα — «стол») — четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 1). Параллельные стороны называются ее основаниями (BC, AD), а две другие стороны — боковыми сторонами (AB, DC).

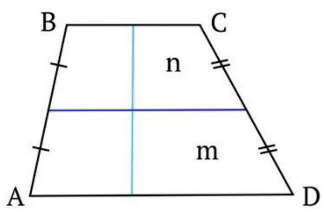


Рис. 1. Трапеция

Трапецией называют и четырехугольник, у которого одна пара противоположных сторон параллельна и стороны не равны между собой.

Средняя линия трапеции (m) — это отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Вторая средняя линия трапеции (n) — это отрезок, соединяющий середины оснований.

Основные свойства трапеции

1. Длина средней линии трапеции равна полусумме длин оснований.

2. Средняя линия трапеции делит пополам любой отрезок с концами на основаниях трапеции.

3. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

4. Длина отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, равна $\frac{2ab}{a+b}$ (среднему гармоническому чисел a и b).

5. В трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжения боковых сторон, середины оснований трапеции лежат на одной линии.

6. Каждая диагональ в точке пересечения делится на две части с таким соотношением длины, как соотношение между основаниями.

7. Длина отрезка, делящего трапецию на две равновеликие, равна $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (среднему квадратичному длин оснований).

8. Диагонали трапеции d_1 и d_2 связаны со сторонами соотношением $d_1^2+d_2^2=2ab+c^2+d^2$.

9. Длина отрезка, разбивающего трапецию на две подобные трапеции, равна среднему геометрическому длин оснований, т.е. $\sqrt{ab}$.

10. Сумма углов, прилегающих к боковой стороне трапеции, равна $180°$.

11. Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна $90°$, то продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна полуразности оснований.

12. Вторая средняя линия трапеции проходит через точку пересечения диагоналей.

13. Средние линии трапеции в точке пересечения делятся пополам.

14. Прямая, содержащая вторую среднюю линию трапеции, проходит через точку пересечения прямых, содержащих боковые стороны.

15. Если средние линии трапеции равны, ее диагонали перпендикулярны.

16. Около окружности можно описать трапецию тогда и только тогда, когда сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон.

17. В трапецию можно вписать окружность, если сумма оснований трапеции равна сумме ее боковых сторон. Длина средней линии в этом случае равна сумме длин боковых сторон, деленной на 2.

18. Высота описанной трапеции равна двум радиусам вписанной окружности. Боковая сторона описанной трапеции видна из центра вписанной окружности под прямым углом.

19. Треугольники, лежащие на основаниях при пересечении диагоналей, подобны.

20. Если отношение оснований равно k, то отношение площадей треугольников, лежащих на основаниях, равно k^2.

21. Диагонали трапеции разбивают ее на 4 треугольника, причем треугольники, прилежащие к основаниям, подобны, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

Площадь трапеции

1. Площадь трапеции равна $S=\frac{a+b}{2}\cdot h=m\cdot h$, где a, b — основания трапеции, h — высота трапеции, m — средняя линия трапеции.

2. Дополнительные формулы для нахождения площади трапеции:

$$S_{TP}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c, d — стороны трапеции,

p — полупериметр трапеции;

$$S_{TP}=\frac{1}{2}d_1 d_2\sin\alpha,$$

где d_1 и d_2 — диагонали трапеции,

α — угол между диагоналями.

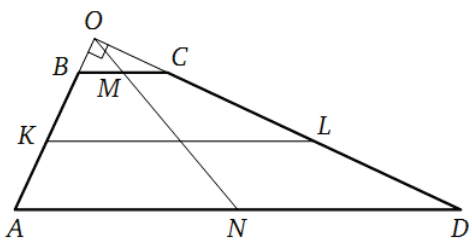
Если трапеция является равнобедренной (боковые стороны равны), то в нее можно вписать окружность. Если r — радиус вписанной окружности, α — угол при основании трапеции, то площадь трапеции определяется по формуле:

$$S=\frac{4r^2}{\sin\alpha}.$$

Для иллюстрации свойств трапеции рассмотрим примеры решения задач.

1. Задача на свойство четырех точек трапеции.

Углы при одном основании трапеции равны 39° и 51°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 19 и 17. Найдите основания трапеции.

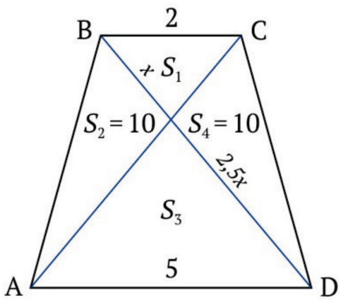


Решение. В трапеции ABCD точки K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном основании равна $39°+51°=90°$, это AD — большее основание. Продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке O, причем в ΔAOD $\angle AOD=180°-(39°+51°)=90°$. Согласно свойству о четырех точках трапеции точка M — середина основания BC, точка N — середина основания AD и точка O лежат на одной прямой. Значит, OM — медиана прямоугольного ΔBOC, ON — медиана прямоугольного ΔAOD, причем, по условию, $ON-OM=17$, $ON+OM=19$. Отсюда, $ON=19$, $OM=1$. $BC=2$, $AD=36$.

Ответ: 2 и 36.

2. Задача на свойства площадей треугольников, на которые трапецию делят диагонали.

Длины сторон трапеции равны 2 и 5. Площадь треугольника, прилегающего к одной из боковых сторон, равна 10. Найдите площадь трапеции.



Решение. По свойству площадей треугольников произведения $S_1S_3=S_2S_4=10\cdot 10=100$.

Поскольку $S_3=\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot S_1$, значит, $S_1S_3=\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot S_1^2S_3=100$.

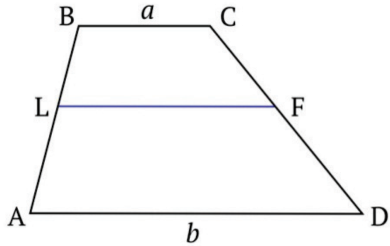
$S_1=10:\frac{5}{2}=4$, тогда $S_3=\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot 4=25$.

$S_{ABCD}=10+10+4+25=49$.

Ответ: 49.

3. Задача на свойство отрезка, делящего трапецию на две равновеликие.

В трапеции проведен отрезок, параллельный основаниям и делящий ее на две трапеции одинаковой площади. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны $24\sqrt{2}$ и $7\sqrt{2}$.



Решение. Используя свойство отрезка, подставляя $a = 7\sqrt{2}$ и $b = 24\sqrt{2}$, получаем:

$$LF = \sqrt{\frac{\left(7\sqrt{2}\right)^2 + \left(24\sqrt{2}\right)^2}{2}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 2 + 576 \cdot 2}{2}} = \sqrt{625} = 25.$$

Ответ: 25.

2.2

Задачи государственной итоговой аттестации по теме «Трапеция», структурированные по применяемым свойствам

1. Длина средней линии трапеции равна полусумме длин оснований (среднему арифметическому чисел *a* и *b*).

Задача 1. Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 3 и 2. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 6.

Задача 2. Высота трапеции равна 10, площадь равна 150. Найдите среднюю линию трапеции. *Ответ:* 15.

Задача 3. Средняя линия трапеции равна 12, площадь равна 96. Найдите высоту трапеции. *Ответ:* 8.

Задача 4. Найдите среднюю линию трапеции, если ее основания равны 30 и 16. *Ответ:* 23.

Задача 5. Средняя линия трапеции равна 28, а меньшее основание равно 18. Найдите большее основание трапеции. *Ответ:* 38.

Задача 6. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей. *Ответ:* 5.

Задача 7. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 4. Найдите среднюю линию этой трапеции. *Ответ:* 10.

Задача 8. Периметр трапеции равен 50, а сумма непараллельных сторон равна 20. Найдите среднюю линию трапеции. *Ответ:* 15.

Задача 9. Основания трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5. Найдите меньшее основание. *Ответ:* 4.

Задача 10. Периметр равнобедренной трапеции равен 80, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону трапеции. *Ответ:* 20.

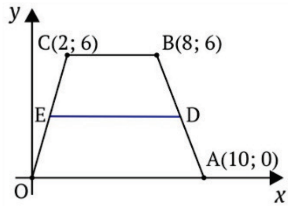
Задача 11. Средняя линия трапеции равна 7, а одно из ее оснований больше другого на 4. Найдите большее основание трапеции. *Ответ:* 9.

Задача 12. Средняя линия трапеции равна 12. Одна из диагоналей делит ее на два отрезка, разность которых равна 2. Найдите большее основание трапеции. *Ответ:* 14.

Задача 13. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию. *Ответ:* 12.

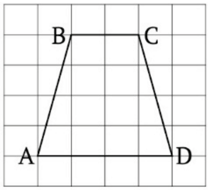
Задача 14. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции. *Ответ:* 4.

Задача 15. Точки O(0; 0), A(10; 0), B(8; 6), C(2; 6) являются вершинами трапеции. Найдите длину ее средней линии DE.



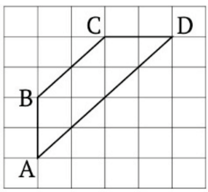
Ответ: 8.

Задача 16. Найдите среднюю линию трапеции ABCD, если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: 3.

Задача 17. Найдите среднюю линию трапеции ABCD, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.



Ответ: 6.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

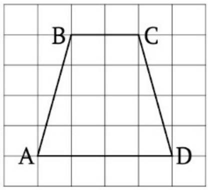
Задача 1. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, который соединяет середины диагоналей трапеции. *Ответ:* 0,5.

Задача 2. Основания трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции. *Ответ:* 1.

Задача 3. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 4. Найди отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции. *Ответ:* 4.

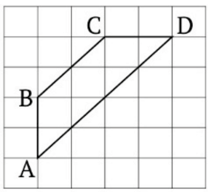
Задача 4. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен 8, а меньшее основание равно 18. Найдите большее основание трапеции. *Ответ:* 34.

Задача 5. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции ABCD, если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: 2.

Задача 6. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции ABCD, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.



Ответ: 2.

Задача 7. Средняя линия трапеции равна 24, а меньшее основание равно 13. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции. *Ответ:* 11.

Задача 8. Средняя линия трапеции равна 29, а одно из ее оснований больше другого на 14. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции. *Ответ:* 7.

Задача 9. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 10, один из углов равен 60 . Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции. *Ответ:* 5.

3. Длина отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, равна $\frac{2ab}{a+b}$ (среднему гармоническому чисел a и b).

Задача 1. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Отрезок EF равен 2. Найдите большее основание, если их отношение равно 4. *Ответ:* 5.

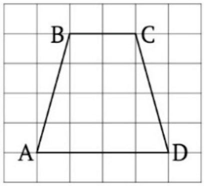
Задача 2. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Отрезок EF равен 2. Найдите меньшее основание, если их отношение равно 4. *Ответ:* 1,25.

Задача 3. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Основания трапеции равны 5 и 1,25. Найдите отрезок EF. *Ответ:* 2.

Задача 4. Найдите отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, если основания равны 16 и 24. *Ответ:* 19,2.

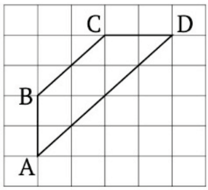
Задача 5. Найдите отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, если средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен 1. *Ответ:* 4,8.

Задача 6. Найдите утроенный отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, если стороны квадратных клеток равны 1.



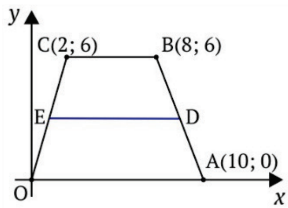
Ответ: 8.

Задача 7. Найдите утроенное произведение отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям трапеции ABCD, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.



Ответ: 16.

Задача 8. Точки O(0; 0), A(10; 0), B(8; 6), C(2; 6) являются вершинами трапеции. Найдите отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям.



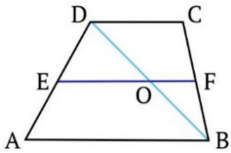
Ответ: 7,5.

4. Средняя линия трапеции делит пополам любой отрезок с концами на основаниях трапеции.

Задача 1. Найдите отношение площадей трапеции, на которые она разбивается средней линией, если основания трапеции равны 2 и 4. *Ответ:* $\frac{5}{7}$.

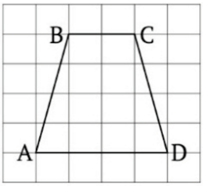
З а д а ч а 2. Найдите отношение отрезков высоты, на которые она разбивается средней линией, если основания трапеции равны $\sqrt{2}$ и $\sin 2$. *Ответ:* 1:1.

З а д а ч а 3. Основания трапеции равны 4 и 10, диагональ DB = 12. Найдите длину отрезка OB, где точка O является точкой пересечения средней линией и диагонали трапеции.



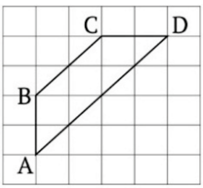
Ответ: 6.

З а д а ч а 4. Найдите отношение отрезков диагонали AC, на которые она разбивается средней линией, если стороны квадратных клеток равны 1.



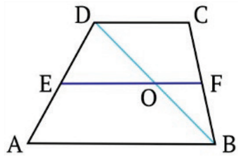
Ответ: 1:1.

З а д а ч а 5. Найдите отношение отрезков высоты, на которые она разбивается средней линией, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.



Ответ: 1:1.

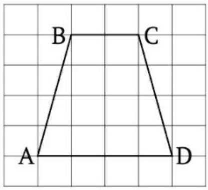
З а д а ч а 6. Основания трапеции равны 4 и 10, диагональ DB = 12. Найдите длину отрезка DO, где точка O является точкой пересечения средней линией и диагонали трапеции.



Ответ: 6.

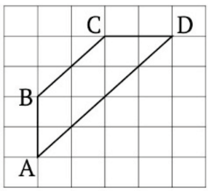
5. Длина отрезка, разбивающего трапецию на две подобные трапеции, равна среднему геометрическому длин оснований, т.е. $\sqrt{ab}$.

Задача 1. Найдите произведение $\sqrt{6}$ на длину отрезка, разбивающего трапецию ABCD на две подобные, если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: 6.

Задача 2. Найдите отношение $\sqrt{2}$ к длине отрезка, разбивающего трапецию ABCD на две подобных, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.



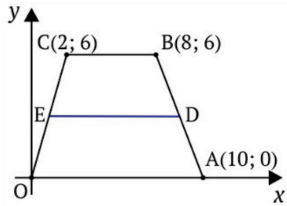
Ответ: 4.

Задача 3. Найдите отрезок, разбивающий трапецию на две подобные, если основания трапеции равны 2 и 8. *Ответ:* 4.

Задача 4. Средняя линия трапеции равна 28, а меньшее основание равно 18. Найдите отношение $\sqrt{38}$ к длине отрезка, разбивающего трапецию на две подобные трапеции. *Ответ:* 1.

Задача 5. Средняя линия трапеции равна 7, а одно из ее оснований больше другого на 4. Найдите произведение $\sqrt{5}$ на длину отрезка, разбивающего трапецию на две подобные трапеции. *Ответ:* 15.

Задача 6. Точки O(0; 0), A(10; 0), B(8; 6), C(2; 6) являются вершинами трапеции. Найдите $\frac{DE}{\sqrt{15}}$, где DE — отрезок, разбивающий трапецию на две подобные.



Ответ: 2.

Задача 7. Средняя линия трапеции равна 7, а одно из ее оснований больше другого на 4. Найдите $\sqrt{5}\cdot MN$, где MN — отрезок, разбивающий трапецию на две подобные. *Ответ:* 15.

6. Высота равнобедренной трапеции, описанной около окружности, есть среднее геометрическое оснований трапеции $h = 2r = \sqrt{ab}$.

Задача 1. Найдите высоту равнобедренной трапеции, описанной около окружности, если основания трапеции равны 2 и 8. *Ответ:* 4.

Задача 2. Средняя линия трапеции равна 28, а меньшее основание равно 18. Найдите отношение $\sqrt{38}$ к длине высоты равнобедренной трапеции, описанной около окружности. *Ответ:* 1.

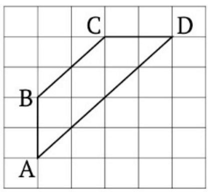
Задача 3. Средняя линия трапеции равна 7, а одно из ее оснований больше другого на 4. Найдите произведение $\sqrt{5}$ на длину высоты равнобедренной трапеции, описанной около окружности. *Ответ:* 15.

Задача 4. Равнобедренная трапеция ABCD описана около окружности. Боковая сторона трапеции равна 10, а основания относятся как 1:4. Найдите высоту трапеции. *Ответ:* 8.

Задача 5. Основания равнобедренной трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5. Найдите $\frac{S}{\pi}$, где S — площадь круга, описанного около трапеции. *Ответ:* 6.

Задача 6. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 28, а меньшее основание равно 18. Найдите $\frac{C}{\sqrt{19}\cdot\pi}$, где C — длина окружности, описанной около трапеции. *Ответ:* 6.

Задача 7. Найдите $\frac{C}{\sqrt{2}\cdot\pi}$, где C — длина окружности, описанной около равнобедренной трапеции, и если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.

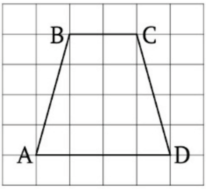


Ответ: 4.

Задача 8. Равнобедренная трапеция ABCD описана около окружности. Боковая сторона трапеции равна 10, а основания относятся как 1:4. Найдите радиус окружности трапеции. *Ответ:* 4.

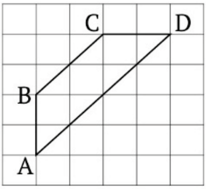
7. Длина отрезка, делящего трапецию на две равновеликие, равна $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (среднему квадратичному длин оснований).

Задача 1. Найдите произведение $\sqrt{10}$ на длину отрезка, разбивающего трапецию ABCD на две равновеликие, если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: 10.

Задача 2. Найдите отношение $\sqrt{10}$ к длине отрезка, разбивающего трапецию ABCD на две равновеликие, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.



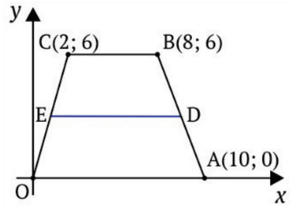
Ответ: 0,5.

Задача 3. Найдите отрезок, делящий трапецию на две равновеликие, если основания трапеции равны $\sqrt{38}$ и 8. *Ответ:* 7.

Задача 4. Средняя линия трапеции равна 7, а меньшее основание равно 6. Найдите отношение $\sqrt{2}$ к длине отрезка, разбивающего трапецию на две равновеликие трапеции. *Ответ:* 0,5.

Задача 5. Средняя линия трапеции равна 7, а одно из ее оснований больше другого на 4. Найдите произведение $\sqrt{53}$ на длину отрезка, разбивающего трапецию на две равновеликие трапеции. *Ответ:* 53.

Задача 6. Точки O(0; 0), A(10; 0), B(8; 6), C(2; 6) являются вершинами трапеции. Найдите $\frac{DE}{\sqrt{17}}$, где DE — отрезок, разбивающий трапецию на две равновеликие.



Ответ: 2.

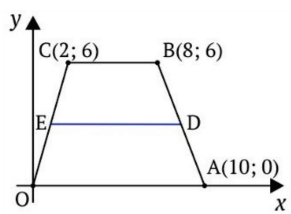
8. Около окружности можно описать трапецию тогда и только тогда, когда сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон.

Задача 1. В трапецию ABCD вписана окружность, AB = 5, CD = 15. Найдите периметр трапеции. *Ответ:* 40.

Задача 2. Периметр трапеции, описанной около окружности, равен 56, две его стороны равны 12 и 20. Найдите бóльшую из оставшихся сторон. *Ответ:* 16.

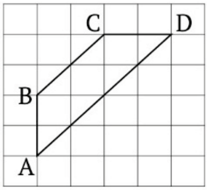
Задача 3. Около окружности описана трапеция ABCD, AB = 10, BC = 6 и CD = 16. Найдите четвертую сторону трапеции. *Ответ:* 20.

Задача 4. Точки O(0; 0), A(10; 0), B(8; 6), C(2; 6) являются вершинами трапеции, около которой можно описать окружность. Найдите длину боковой стороны.



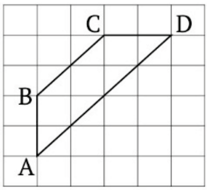
Ответ: 8.

Задача 5. Найдите сторону AB трапеции ABCD, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$ и около этой трапеции можно описать окружность.



Ответ: 6.

Задача 6. Найдите периметр трапеции ABCD, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$ и около этой трапеции можно описать окружность.



Ответ: 24.

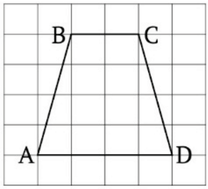
9. Площадь трапеции равна $S=\frac{a+b}{2}\cdot h=m\cdot h$, где a, b — основания трапеции, h — высота трапеции, m — средняя линия трапеции.

Задача 1. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 10. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 20.

Задача 2. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Средняя линия трапеции равна 12. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 24.

Задача 3. Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 3 и 2. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 6.

Задача 4. Найдите площадь трапеции ABCD, если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: 12.

Задача 5. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 160.

Задача 6. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите периметр трапеции. *Ответ:* 30.

Задача 7. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 6 и 2, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°. *Ответ:* 16.

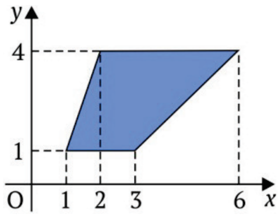
Задача 8. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Ее площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах. *Ответ:* 45°.

Задача 9. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите боковую сторону трапеции. *Ответ:* 5.

Задача 10. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 42.

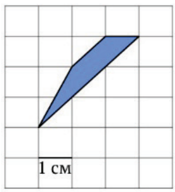
Задача 11. Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне. Ответ выразите в градусах. *Ответ:* 30°.

Задача 12. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



Ответ: 9.

Задача 13. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: 2.

10. Дополнительные формулы для нахождения площади трапеции.

Задача 1. Найдите площадь описанной равнобедренной трапеции около окружности с углом при основании, равным 30°, если основания трапеции равны 2 и 8. *Ответ:* 32.

Задача 2. Средняя линия равнобедренной трапеции, описанной около круга с углом равным 150°, равна 28, а меньшее основание равно 18. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 1368.

Задача 3. Средняя линия равнобедренной трапеции, описанной около круга с углом равным 30°, равна 7, а одно из ее оснований больше другого на 4. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 90.

Задача 4. Найти $\sqrt{3}\cdot S$ равнобедренной трапеции с углом при основании, равным 30°, если основания трапеции равны 2 и 8. *Ответ:* 45.

Задача 5. Найдите площадь трапеции с диагоналями $2\sqrt{2}$ и 3, с углом между ними, равным 45°. *Ответ:* 3.

Задача 6. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности. *Ответ:* 3.

Задача 7. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10. Решите всеми возможными способами. *Ответ:* 80.

Задача 8. Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 255.

Задача 9. В трапецию ABCD с основаниями BC и AD и боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром в точке O. Найдите площадь трапеции, если угол DAB прямой, OC = 2, OD = 4. *Ответ:* 14,4.

Задача 10. A, B, C, D — последовательные вершины прямоугольника. Окружность проходит через A и B и касается стороны CD в ее середине. Через D проведена прямая, которая касается той же окружности в точке E, а затем пересекает продолжение стороны AB в точке K. Найдите площадь трапеции BCDK, если известно, что AB = 10 и KE : KA = 3 : 2. *Ответ:* 210.

Задача 11. Окружность радиуса $\sqrt[4]{5}$, проведенная через вершины A, B и C прямоугольной трапеции ABCD($\angle A = \angle B = 90$) пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках M и N, причем AM : AD = CN : CD = 1 : 3. Найдите $3S$, где S — площадь трапеции. *Ответ:* 20.

Задача 12. В равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 9, вписана окружность с радиусом 4. Найдите площадь трапеции. *Ответ:* 72.

Задача 13. Найдите площадь трапеции с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4. *Ответ:* 37,2.

Задача 14. Найдите площадь трапеции с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12. *Ответ:* 54.

Задача 15. Вычислите площадь трапеции по разности оснований, равной 14, и двум непараллельным сторонам, равным 13 и 15, если известно, что в трапецию можно вписать окружность. *Ответ:* 168.

2.3

Многовариантные задачи по теме «Трапеция»

В школьном курсе геометрии почти не уделяется внимание многовариантным задачам. Базовые школьные учебники не предусматривают детальную работу с задачами данного типа, а другой литературы бывает недостаточно.

В то же время многовариантные задачи традиционно популярны при проведении всевозможных конкурсов, олимпиад, а также встречаются в рамках ЕГЭ.

Решение многовариантных задач позволяет обучающимся овладеть математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, а также умением извлекать информацию на основе сопоставительного анализа, самостоятельно выполнять различные творческие работы.

В отличие от большинства задач школьной программы данные задачи содержат некоторую неопределенность, которая позволяет трактовать условие неоднозначно. В результате не удается построить чертеж по условию задачи в одном варианте. Поэтому подобные задачи называют многовариантными. Рассмотрение вариантов является частью решения задач такого типа.

Приведем причины неоднозначной трактовки условия задачи.

1. Из условия задачи невозможно однозначно определить взаимное расположение двух фигур:

- точки и прямой (расположение точки на прямой или в одной из полуплоскостей);
- точки и двух параллельных прямых;
- точки и отрезка, лежащих на одной прямой (или трех точек, лежащих на одной прямой);
- точки и окружности (внутри, на или вне окружности);
- точки и многоугольника (внутри, на сторонах или вне многоугольника);
- вписанного угла, опирающегося на хорду (вид угла — острый, прямой или тупой).

2. Из условия задачи невозможно однозначно определить взаимное расположение точек или элементов фигуры:

- треугольника, вписанного в окружность (расположение центра окружности относительно треугольника);
- трапеции, вписанной в окружность (расположение центра окружности относительно трапеции).

3. Условие задачи допускает различные решения в зависимости от варианта обозначения вершин многоугольника.

4. Имеется произвол в выборе линейного элемента / углового элемента / отношения отрезков, площадей фигур.

5. В задаче рассматриваются объекты, которым приписываются определенные свойства, но не указан порядок соответствия между множеством объектов и множеством их свойств.

Например:

- условие задачи не привязано к конкретной вершине многоугольника;
- в равнобедренном треугольнике, в котором не указаны равные стороны;
- при заданном отношении пары сторон многоугольника не указано, какой конкретно;
- при пересечении прямых задано значение одной из двух пар вертикальных углов, но не указано, какой конкретно.

При решении подобных задач следует задавать следующие вопросы:

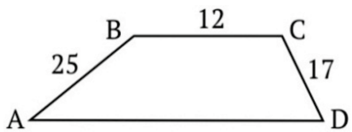
- «Можно ли построить другую фигуру, не равную данной, но также удовлетворяющую условию задачи?»
- «При каких числовых значениях заданных элементов нельзя построить описанную в условии фигуру?» и др.

Ответы на такие вопросы позволяют выявить различные ситуации, возникающие при решении задачи.

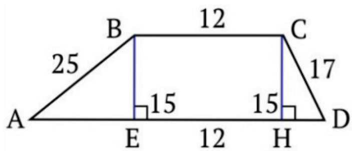
Приведем примеры многовариантных задач, связанных с неоднозначностью описания взаимного расположения элементов фигуры.

Пример 1. Вычислить периметр трапеции, боковые стороны которой равны 25 и 17, высота равна 15, а одно из оснований равно 12. В данном примере возможно два варианта построения трапеции ABCD и $ABCD_1$.

1 вариант решения



Проведем высоты трапеции.



Рассмотрим прямоугольные треугольники ABE и CDH.

Из $\triangle$ABE: $AE^2 = AB^2 - BE^2$

$$AE^2 = 25^2 - 15^2$$

$$AE^2 = 400$$

$$AE = 20$$

Из ΔHCD: $HD^2 = CD^2 - CH^2$

$HD^2 = 17^2 - 15^2$

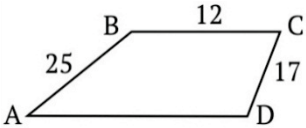
$HD^2 = 64$

$HD = 8$

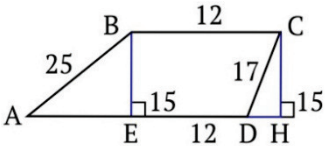
Основание трапеции: $AD = 20 + 12 + 8 = 40$.

Значит, периметр трапеции: $P = 25 + 12 + 17 + 40 = 94$.

2 вариант решения



Проведем высоты трапеции.



Рассмотрим прямоугольные треугольники ABE и CDH.

Из ΔABE: $AE^2 = AB^2 - BE^2$

$AE^2 = 25^2 - 15^2$

$AE^2 = 400$

$AE = 20$

$ED = EH - DH = 12 - 8 = 4$

Из ΔHCD: $HD^2 = CD^2 - CH^2$

$HD^2 = 17^2 - 15^2$

$HD^2 = 64$

$HD = 8$

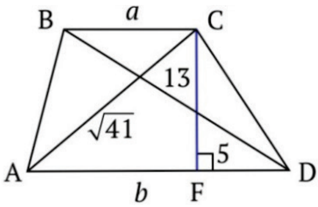
Основание трапеции: $AD = 20 + 4 = 24$.

Значит, периметр трапеции: $P = 25 + 12 + 17 + 24 = 78$.

Ответ: 78 или 94.

Пример 2. Диагонали трапеции равны 13 и $\sqrt{41}$, а высота равна 5. Найдите площадь трапеции.

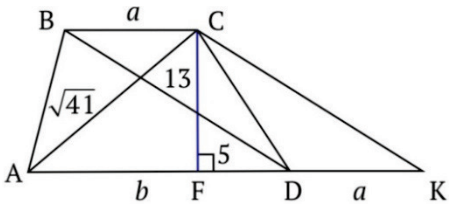
1 вариант решения



Обозначим основания трапеции BC и AD через *a* и *b* соответственно.

Площадь трапеции ABCD: $S_{ABCD} = \dfrac{(a+b)}{2} \cdot h.$

Проведем CK параллельно BD. Получаем параллелограмм BCDK по определению. Следовательно, $\mathrm{DK} = a$.



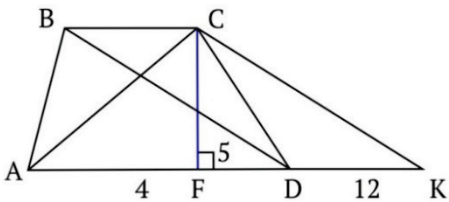
Рассмотрим треугольники ACF и FCK.

Из ΔACF: $\left(\sqrt{41}\right)^2 = 5^2 + AF^2$

$$AF^2 = 41 - 25$$
$$AF = 4$$

Из ΔFCK: $13^2 = 5^2 - KF^2$

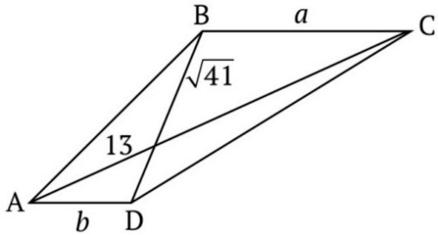
$$KF^2 = 169 - 25$$
$$KF = 12$$



Следовательно, $a + b = 16$.

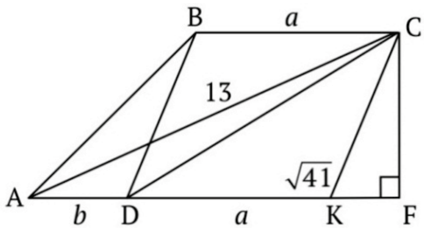
Тогда площадь трапеции: $S_{ABCD}\frac{16}{2}\cdot 5 = 40.$

2 вариант решения



Площадь трапеции ABCD: $S_{ABCD}\frac{(a+b)}{2}\cdot h.$

Проведем CK параллельно BD. Получаем параллелограмм BCDK по определению. Следовательно, DK = a. Проведем высоту CF = 5.



Рассмотрим треугольники ACF и FCK.

Из ΔACF: $13^2 = 5^2 + AF^2$

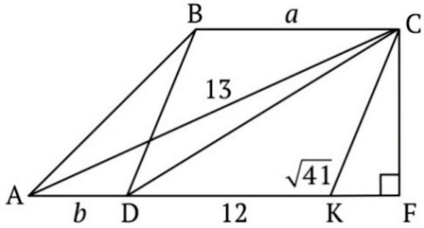
$$AF^2 = 169 - 25$$

$$AF = 12$$

Из ΔFCK: $\left(\sqrt{41}\right)^2 = 5^2 + KF^2$

$$KF^2 = 41 - 25$$

$$KF = 4$$



Следовательно, $a + b = 12 - 4 = 8$.

Тогда площадь трапеции: $S_{ABCD}\frac{8}{2}\cdot 5 = 20$.

Ответ: 40 или 20.

В школьной программе почти отсутствуют многовариантные задачи. Поэтому они довольно непривычны для школьников. Следовательно, чтобы исключить ситуацию непосредственно на самом экзамене, когда выпускник впервые сталкивается с подобной задачей, необходимо включать их в учебный процесс. Причем следует делать это систематически, начав с достаточно простых задач, постепенно повышая уровень сложности.

Далее приведем примеры многовариантных задач.

Задача 1. В окружность радиуса R вписана трапеция с основаниями a и b. Найдите площадь трапеции, если R = 13, $a = 24$ и $b = 10$. *Ответ:* 119; 289.

Задача 2. Точка касания окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, делит боковую сторону на отрезки длиной 1 и 4. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его площадь. *Ответ:* 10; $\frac{128}{11}$.

Задача 3. Окружность с радиусом 6 вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 18. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции. *Ответ:* $\frac{1}{2}$; $\frac{162}{299}$.

З а д а ч а 4. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 24, а синус угла при большем основании равен $\frac{3}{5}$. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции. *Ответ:* $\frac{1}{2}$; $\frac{81}{130}$.

З а д а ч а 5. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 и 50. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции. *Ответ:* $\frac{1}{2}$; $\frac{625}{1122}$.

З а д а ч а 6. В трапеции ABCD, у которой AD параллельна BC и $AD:BC=2:1$, на боковых сторонах AB и CD выбраны соответственно точки E и F так, что $AE\cdot DF=BE\cdot CF$. Отрезки AF и DE пересекаются в точке G. Площадь треугольника ADG в 6 раз меньше площади трапеции ABCD. В каком отношении точка E делит боковую сторону AB? *Ответ:* $2:1$; $1:2$.

З а д а ч а 7. Площадь трапеции ABCD равна 810. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого. *Ответ:* $\frac{45}{2}$; $\frac{72}{5}$.

З а д а ч а 8. Площадь трапеции ABCD равна 240. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции втрое больше другого. *Ответ:* $\frac{27}{5}$; $\frac{135}{49}$.

Задача 9. Площадь трапеции ABCD равна 240. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь четырехугольника OMPN, если одно из оснований трапеции втрое больше другого. *Ответ:* 27; $\frac{45}{7}$.

Задача 10. Площадь трапеции ABCD равна 90. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь четырехугольника OMPN, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого. *Ответ:* 10 или 4.

Задача 11. Площадь трапеции ABCD равна S, отношение оснований $\frac{AD}{BC}=3$. На прямой, пересекающей продолжение основания AD за точку D, расположен отрезок EF, причем AE параллелен DF, BE параллелен CF и $\frac{AE}{DF}=\frac{CF}{BE}=2$. Найдите площадь треугольника EFD. *Ответ:* $\frac{3}{10}S$; $\frac{9}{20}S$.

Задача 12. Площадь трапеции ABCD равна S, отношение оснований $\frac{AD}{BC}=3$. Отрезок MN расположен так, что он параллелен стороне CD, пересекает сторону AB, а отрезок AM параллелен отрезку BN. Найдите площадь треугольника BNC, если $\frac{AM}{BN}=\frac{3}{2}$, $\frac{MN}{CD}=\frac{1}{3}$. *Ответ:* $\frac{2}{15}S$; $\frac{1}{15}S$.

Задача 13. Площадь трапеции ABCD равна S, отношение оснований $\frac{AD}{BC}=2$. Отрезок MN расположен так, что он параллелен диагонали BD, пересекает диагональ AC, а отрезок AM параллелен отрезку CN. Найдите площадь четырехугольника AMND, если $\frac{CN}{AM}=3$, $\frac{BD}{MN}=6$. *Ответ:* $\frac{5}{24}S$; $\frac{1}{8}S$.

Задача 14. Площадь трапеции ABCD равна S, отношение оснований $\frac{AD}{BC}=3$. На прямой, пересекающей отрезок AD, расположен отрезок EF, причем AE параллелен DF, BE параллелен CF и $\frac{DF}{AE}=\frac{BE}{CF}=2$. Найдите площадь треугольника EFD. *Ответ:* $\frac{3}{10}S$; $\frac{3}{2}S$.

Задача 15. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2. *Ответ:* 40°; 80°.

Задача 16. Найдите площадь трапеции, если ее диагонали равны 17 и 113, а высота равна 15. *Ответ:* 900; 780.

Задача 17. Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее на две трапеции, площади которых относятся как $1:2$. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, если основания трапеции равны *a* и *b*. *Ответ:* $\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}$; $\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}$.

Задача 18. Основания трапеции равны *a* и *b*. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как $2:3$. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции. *Ответ:* $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$; $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$.

Задача 19. Периметр равнобедренной трапеции равен 52. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении $4:9$. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции. *Ответ:* $\frac{1}{2}$; $\frac{162}{299}$.

Задача 20. Периметр равнобедренной трапеции равен 136. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении $9:25$. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции. *Ответ:* $\frac{1}{2}$; $\frac{625}{1122}$.

Задача 21. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC. *Ответ:* 6; 4.

Задача 22. Боковые стороны KL и MN трапеции KLMN равны 16 и 34 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 15, средняя линия трапеции равна 30. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM. *Ответ:* 9; 3.

Задача 23. Боковые стороны KL и MN трапеции KLMN равны 7 и 25 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 60. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM. *Ответ:* 9; 6.

Задача 24. Боковые стороны KL и MN трапеции KLMN равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM. *Ответ:* 2; 5.

Задача 25. Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1:3. *Ответ:* 16; 48; 144.

Задача 26. Дана трапеция ABCD, в которой BC = a, AD = b. Параллельно основаниям трапеции BC и AD проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P, диагональ AC в точке L, диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q. Известно, что PL = LR. Найдите PQ. *Ответ:* $\frac{3ab}{2a+b}$; $\frac{3ab}{a+2b}$.

Задача 27. В трапеции ABCD основание BC = 10, а боковые стороны AB = 36 и CD = 34. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD. *Ответ:* $36;\ 8\sqrt{19}$.

Задача 28. Трапеция с основаниями длиной 14 и 40 вписана в окружность с радиусом 25. Найдите высоту трапеции. *Ответ:* 9; 39.

Задача 29. Дана трапеция ABCD, основания которой BC = 44 и AD = 100. Боковые стороны AB = CD = 35. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK. *Ответ:* 5; 30.

Задача 30. В трапеции ABCD основание BC = 10, а боковые стороны AB = 30 и CD = 25. Диагонали пересекаются в точке O. Высота трапеции равна 24. Найдите площадь треугольника AOB. *Ответ:* $\frac{280}{3}$; $\frac{2520}{31}$.

Задача 31. Площадь трапеции ABCD равна 135, одно основание вдвое больше другого. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON. *Ответ:* 3,75; 2,4.

Задача 32. Средняя линия трапеции разбивает ее на две трапеции, площади которых относятся как $2:1$. Чему равно отношение оснований трапеции? *Ответ:* $1:5$; $5:1$.

Задача 33. Одно из оснований трапеции равно 24, а расстояние между серединами диагоналей равно 4. Найдите другое основание. *Ответ:* 16; 32.

Задача 34. Вычислите периметр трапеции, боковые стороны которой равны 25 и 17, высота равна 15, а одно из оснований равно 12. *Ответ:* 78; 94.

Задача 35. В трапеции длины боковых сторон равны 16 и 12, а длины оснований равны 30 и 10. Найдите радиус окружности, касающейся меньшего основания трапеции и прямых, содержащих ее боковые стороны. *Ответ:* 2; 12.

Задача 36. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = 0{,}6$. *Ответ:* 9; 1.

РАЗДЕЛ 3

Персонализированное обучение на основе многовариантных практикумов

3.1

Многовариантные практикумы как средство организации самообразовательной деятельности старшеклассников

Актуальность разработки многовариантных практикумов по алгебре и началам анализа обусловлена поиском оптимальных способов организации персонализированных самостоятельных практических работ и контроля знаний обучающихся. Наличие многовариантных практикумов позволяет учителю организовать работу так, чтобы каждый обучающийся смог показать знания по теме и реализовать свои способности в рамках урока.

Предлагаемый набор практикумов содержит 20 вариантов по следующим темам алгебры и начал математического анализа для обучающихся 10–11-х классов: показательные уравнения, показательные неравенства, логарифмические уравнения, логарифмические неравенства, производная функции. Все варианты имеют одинаковый уровень сложности. При этом каждый обучающийся работает самостоятельно и с учетом собственных способностей.

Для удобства практикумы начинаются с краткой теоретической части, содержащей необходимые понятия и формулы. Затем представлено решение нулевого варианта с методическими указаниями и рекомендациями. Наличие таблиц с ответами позволяет учителю сэкономить время на проверку.

При разработке данных практикумов были использованы следующие принципы обучения:

- принцип доступности (дидактические материалы подбираются учителем в соответствии с уровнем, которого достигли обучающиеся);
- принцип самостоятельной деятельности (работа с дидактическими материалами осуществляется самостоятельно);
- принцип индивидуальной направленности (работа с дидактическими материалами осуществляется в индивидуальном темпе, уровень сложности и вид материалов могут подбираться также индивидуально).

В рамках практикума предлагается новый подход к оценке самостоятельной работы обучающихся. Отметка «5» ставится за безошибочное выполнение всех заданий варианта. При выполнении менее 90% заданий обучающемуся предлагается сделать работу над ошибками, а также дорешить задания. После этого он должен выполнить задания другого варианта, обозначенные тем же номером. При правильном их решении ставится отметка «4», при повторных ошибках опять должна быть выполнена работа на исправление, после чего обучающийся выполняет задания третьего варианта под номером ошибочно выполненных заданий из других вариантов. Только после этого ставится отметка «3». Работа выполняется до тех пор, пока обучающийся не выполнит задания. В противном случае подразумевается неудовлетворительная отметка.

Отметка «5» может быть выставлена и в том случае, если обучающийся безошибочно решил все задания из другого варианта. В этом случае школьник привыкает проверять себя, чтобы не допустить ошибок по невнимательности.

Как показала практика, обучающиеся, претендующие на более высокий результат, в процессе решений приобретают некий здоровый азарт, позволяющий оттачивать навыки самоконтроля, формируемые с начальной школы. Обучающиеся с низкими показателями отрабатывают умения и навыки, которые позволяют им сдать единый государственный экзамен на высокие баллы.

В разделе 3 использовались материалы из следующих источников: [Лысенко, Кулабухова, 2017; Лысенко, 2018; Открытый банк заданий ЕГЭ (базовый уровень); Открытый банк заданий ЕГЭ (профильный уровень); Семенов и др., 2016; Ященко, Шестаков, 2017б].

3.2

Практикум по теме «Показательные уравнения»

Показательные уравнения — это уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где a — положительное число, отличное от 1) и уравнения, сводящиеся к этому виду.

В силу монотонности функции $y = a^x$ равенство $a^t = a^s$, где $a > 0,\ a \neq 1$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Справедливо будет утверждение: показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0,\ a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

При решении уравнений целесообразно использовать свойства степени:

1) $a^0 = 1$ 2) $a^1 = a$ 3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

4) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 5) $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ 6) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

7) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ 8) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ 9) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Рассмотрим решение нескольких уравнений.

Вариант 0

Пример 1. Решите неравенство $4^x = 32$.

Указание. Представьте левую и правую части уравнения в виде степени с основанием 2. Приравняйте показатели и решите линейное уравнение.

Решение:

$4^x = 32 \;\Rightarrow\; 2^{2x} = 2^5 \;\Rightarrow\; 2x = 5 \;\Rightarrow\; x = 2{,}5$

Ответ: 2,5.

Пример 2. Решите неравенство $8 \cdot 2^x = 32$.

Указание. Представьте множитель 8 и правую часть уравнения в виде степени. Примените свойство умножения степеней с одинаковым основанием (3) в левой части уравнения. Приравняйте показатели и решите линейное уравнение.

Решение:

$8 \cdot 2^x = 32 \;\Rightarrow\; 2^3 \cdot 2^x = 2^5 \;\Rightarrow\; 2^{3+x} = 2^5 \;\Rightarrow\; 3 + x = 5 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x = 2$

Ответ: 2.

Пример 3. Решите неравенство $5^{x+1} - 2 \cdot 5^x = 75$.

Указание. Представьте степень в виде произведения степеней с одинаковым основанием. Вынесите общий множитель за скобки. Разделите обе части уравнения на 3. Представьте правую часть уравнения в виде степени с основанием 5 и решите уравнение, приравняв показатели степеней.

Решение:

$5^{x+1} - 2 \cdot 5^x = 75 \;\Rightarrow\; 5^x \cdot 5 - 2 \cdot 5^x = 75 \;\Rightarrow\; 5^x (5-2) = 75 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; 5^x \cdot 3 = 75 \;\Rightarrow\; 5^x = 25 \;\Rightarrow\; 5^x = 5^2 \;\Rightarrow\; x = 2$

Ответ: 2.

Пример 4. Решите неравенство $9^x - 6\cdot 3^x - 27 = 0$.

Указание. 9^x представьте в виде степени с основанием 3. Введите новую переменную $y = 3^x$. Решите квадратное уравнение. Вернитесь к переменной *x* и решите два уравнения. Первое уравнение имеет корень, а второе корней не имеет.

Решение:

$3^{2x} - 6\cdot 3^x - 27 = 0.$

Пусть $y = 3^x$, тогда $y^2 - 6y - 27 = 0$; $y_1 = 9$, $y_2 = -3$.

Возвращаясь к переменной *x*, получим:

$3^x = 9 \;\Rightarrow\; x = 2$; $3^x = -3 \;\Rightarrow\;$ корней нет, так как $3^x < 0$.

Ответ: 2.

Пример 5. Решите неравенство $3^x + 3^{-x} = 4$.

Указание. Выполните преобразования, используя свойство степени (8). Введите новую переменную $y = 3^x$. Решите уравнение относительно переменной *y*. Вернитесь к переменной *x* и решите два уравнения.

Решение:

$$3^x + 3^{-x} = 4 \;\Rightarrow\; 3^x + \frac{3}{3^x} = 4.$$

Пусть $y = 3^x$, тогда $y + \dfrac{3}{y} = 4 \;\Rightarrow\; y^2 - 4y + 3 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = 3$.

Возвращаясь к переменной *x*, получим:

$3^x = 1 \;\Rightarrow\; x = 0$; $3^x = 3 \;\Rightarrow\; x = 1$.

Ответ: 0; 1.

Пример 6. Решите неравенство $6^x = 5^x$.

Указание. Степени равны, показатели равны, но основания различны. Это возможно лишь тогда, когда показатель равен 0.

Решение:

$6^x = 5^x \;\Rightarrow\; x = 0.$

Ответ: 0.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

Решите уравнения

1. $9^{-x}=27$
2. $8^{-1}\cdot 2^{x+4}=32$
3. $7^{x+1}-3\cdot 7^{x-1}=46$
4. $36^{x}-4\cdot 6^{x}-12=0$
5. $3^{x}+3^{3-x}=12$
6. $7^{x-3}=9^{x-3}$

Вариант 2

Решите уравнения

1. $4^{-x}=8$
2. $4^{-1}\cdot 2^{x+3}=8$
3. $5^{x+1}-2\cdot 5^{x-1}=23$
4. $9^{x}-8\cdot 3^{x}-9=0$
5. $3^{x}+3^{-x}=2$
6. $4^{2x+6}=11^{2x+6}$

Вариант 3

Решите уравнения

1. $25^{x}=125$
2. $4^{2x}\cdot 4^{5}=4^{-3x}$
3. $3^{x+1}+5\cdot 3^{x}=72$
4. $49^{x}-8\cdot 7^{x}+7=0$
5. $2^{2+x}-2^{2-x}=15$
6. $11^{\frac{x}{4}+1}=13^{\frac{x}{4}+1}$

Вариант 4

Решите уравнения

1. $2^{3-x}=16$
2. $4^{-x}\cdot 4^{2x+3}=\frac{1}{4}$
3. $2^{x+2}+7\cdot 2^{x}=88$
4. $16^{x}+3\cdot 4^{x+1}-64=0$
5. $2^{x}-2^{-x}=\frac{15}{4}$
6. $\left(\frac{13}{5}\right)^{5x-10}=\left(\frac{1}{6}\right)^{5x-10}$

Вариант 5

Решите уравнения

1. $3^{4-x}=27$
2. $4^{x^2}\cdot 4^{2}=16^{\frac{x}{2}+1}$
3. $3^{x}-3^{x+3}=-78$
4. $9^{x}-2\cdot 3^{x}-3=0$
5. $5^{x}+5^{-x}=2$
6. $5^{10x-9}=\left(\frac{1}{10}\right)^{10x-9}$

Вариант 6

Решите уравнения

1. $3^{2x-4}=\frac{1}{9}$
2. $3^{x^2}\cdot 3^{2}=9^{\frac{x+2}{2}}$
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{5x}=\frac{4}{9}$
4. $9^{x}-6\cdot 3^{x}-27=0$
5. $2^{2+x}-2^{2-x}=15$
6. $3^{5x+11}=7^{5x+11}$

Вариант 7

Решите уравнения

1. $2^{2x+3}=8$
2. $4^{x+\frac{1}{2}}\cdot 4^{x-2}=1$
3. $3^{x}+3^{x+1}=4$
4. $25^{x}-6\cdot 5^{x}+5=0$
5. $3^{x}+3^{3-x}=12$
6. $23^{x^2-4x}=27^{x^2-4x}$

Вариант 8

Решите уравнения

1. $12^{3x-6}=144$
2. $3^{3x-1}\cdot 3^{x}=\frac{1}{3}$
3. $6^{x-2}-6^{x-1}=-180$
4. $4^{x}-14\cdot 2^{x}-32=0$
5. $2^{x}-2^{-x}=\frac{15}{4}$
6. $7^{5x-x^2}=17^{5x-x^2}$

Вариант 9

Решите уравнения

1. $3^{-x-3}=81$
2. $5^{-3x}\cdot 5^{4-5x}=\frac{1}{5}$
3. $2^{x+2}+2^{x}=5$
4. $9^{x}-4\cdot 3^{x}+3=0$
5. $3^{x}-6\cdot 3^{-x}=1$
6. $19^{x^2-10x+9}=21^{x^2-10x+9}$

Вариант 10

Решите уравнения

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}=\frac{1}{27}$
2. $11^{-3x}\cdot 11^{4-5x}=\frac{1}{121}$
3. $3^{x+2}-3^{x}=72$
4. $9^{x}-3^{x+1}=54$
5. $2^{2x+1}-2^{2-x}=15$
6. $5^{4x^2-7x+3}=15^{4x^2-7x+3}$

Вариант 11

Решите уравнения

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}=\frac{1}{16}$
2. $4^{x}\cdot 3^{x}=144^{x-2}$
3. $3^{x+2}+3^{x}=30$
4. $2\cdot 2^{2x}-17\cdot 2^{x}+8=0$
5. $2^{x}-2^{-x}=\frac{15}{4}$
6. $5{,}5^{-x^2-2x+3}=11^{-x^2-2x+3}$

Вариант 12

Решите уравнения

1. $4^{2x-4}=\frac{1}{16}$
2. $7^{3x-2}\cdot 7^{x-1}=7$
3. $2^{x+3}-2^{x}=112$
4. $4^{x}-3\cdot 2^{x}=4$
5. $3^{x}+3^{-x}=2$
6. $8^{x^2-13x}=4^{x^2-13x}$

Вариант 13

Решите уравнения

1. $5^{13-4x}=\frac{1}{125}$
2. $4^x\cdot5^x=400$
3. $3^{3x+1}-5\cdot3^{3x-1}=36$
4. $3\cdot3^{2x}-28\cdot3^x+9=0$
5. $3^x+3^{3-x}=12$
6. $7^{x^2-6x}=35^{x^2-6x}$

Вариант 14

Решите уравнения

1. $4^{x-11}=\frac{1}{64}$
2. $2^{2x}\cdot3^x=144^{x-10}$
3. $2\cdot3^{x+3}-5\cdot3^{x-2}=1443$
4. $4^x-3\cdot2^x=40$
5. $3^x-6\cdot3^{-x}=1$
6. $11^{x^2-4x}=33^{x^2-4x}$

Вариант 15

Решите уравнения

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{12-4x}=16$
2. $3^{3x-4}:3^{-5x+2}=27$
3. $3^x+4\cdot3^{x+1}=13$
4. $25^x-4\cdot5^x-5=0$
5. $2^x-2^{-x}=\frac{15}{4}$
6. $25^x=7^{2x}$

Вариант 16

Решите уравнения

1. $5^{2x+4}=\frac{1}{25}$
2. $6^{2x-6}\cdot6^{5-3x}=216$
3. $3\cdot2^{x+1}-6\cdot2^{x-1}=12$
4. $2^{2x+1}+2^{x+2}=16$
5. $2^{2+x}-2^{2-x}=15$
6. $(0{,}3)^{2x}=8^x$

Вариант 17

Решите уравнения

1. $\left(\frac{1}{13}\right)^{2x+1}=\frac{1}{169}$
2. $4^x\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{1}{9}$
3. $5^x-7\cdot5^{x-2}=90$
4. $4^x+2^{x+1}=80$
5. $3^x+3^{-x}=2$
6. $5^{9x-10}=\left(\frac{1}{10}\right)^{9x-10}$

Вариант 18

Решите уравнения

1. $3^{5x+2{,}5}=\sqrt{3}$
2. $5^x\cdot2^x=0{,}1^{-3}$
3. $5^{x+1}-3\cdot5^{x-2}=122$
4. $4^x-9\cdot2^x+8=0$
5. $3^x+3^{3-x}=12$
6. $\left(\frac{7}{5}\right)^{3x-12}=\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-12}$

Вариант 19

Решите уравнения

1. $3^{5x-17}=\frac{1}{27}$
2. $5^{2x+1}\cdot 25=\frac{1}{125}$
3. $3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=69$
4. $36^x-35\cdot 6^x-36=0$
5. $3^x-6\cdot 3^{-x}=1$
6. $9^{5x-1}=27^{5x-1}$

Вариант 20

Решите уравнения

1. $0{,}8^{2x-3}=1$
2. $2^{5x-2}:2^{3x-4}=8$
3. $2^{x+3}-5\cdot 2^x=3\cdot 2^{-1}$
4. $4^{x^2+2}-9\cdot 2^{x^2+2}+8=0$
5. $2^x-2^{-x}=\frac{15}{4}$
6. $6^{3x+x^2}=18^{3x+x^2}$

Ответы к практикуму по теме «Показательные уравнения»

Варианты 1–10

Номер задания	**Вариант**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	−1,5	−1,5	1,5	−1	1	1	0	$2\frac{2}{3}$	−7	2
2	4	7	−1	−4	0; 1	0; 1	0,75	0	$\frac{5}{8}$	0,75
3	1	1	2	3	1	0,4	0	4	0	2
4	1	2	0; 1	1	1	2	0; 1	4	0; 1	2
5	1; 2	0	2	2	0	2	1; 2	2	1	2
6	3	−3	−4	2	0,9	−2,2	0; 4	0; 5	1; 9	$\frac{3}{4}$; 1

Варианты 11–20

Номер задания	Вариант									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	−1	1	4	8	3,5	−3	0,5	−0,4	2,8	1,5
2	4	1	2	20	$1\frac{1}{8}$	−4	−2	3	−3	0,5
3	1	4	1	3	0	2	3	2	3	−1
4	−1; 3	2	−1; 2	3	1	2	3	0; 3	2	−1; 1
5	2	0	1; 2	1	2	2	0	1; 2	1	2
6	−3; 1	0; 13	0; 6	0; 4	0	0	$1\frac{1}{9}$	4	0,2	−3; 0

3.3

Практикум по теме «Показательные неравенства»

Показательными неравенствами являются неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду. Для решения неравенства разделим обе части неравенства на выражение $a^{g(x)}$, получим неравенство $\frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} > 1$, равносильное первоначальному неравенству, так как разделили на положительное выражение при любых значениях x. Используя свойства степени, получим $a^{f(x)-g(x)} > 1$, т.е. $a^t > 1$, где $t = f(x) - g(x)$.

Рассмотрим два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $a^t > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t > 0$ (в силу возрастания показательной функции с основанием, бóльшим единицы).

Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^t > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t < 0$ (в силу убывания показательной функции с основанием, бóльшим нуля, но меньшим единицы).

При решении показательных неравенств целесообразно использовать следующие утверждения:

1) показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

2) показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Вариант 0

Пример 1. Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$.

Указание. Представьте левую и правую части уравнения в виде степени с основанием 3. Сравните основание степени с единицей. Воспользуйтесь утверждением (1).

Решение:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3 \;\Rightarrow\; 3^{-x} < 3^1$. Так как $3 > 1$, то $-x < 1$, $x > -1$.

Ответ: $(-1;\; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $4^{2-3x} < 8$.

Указание. Представьте левую и правую части неравенства в виде степени с основанием 2. Примените свойство степени в левой части неравенства. Сравните основание степени с единицей. Воспользуйтесь утверждением (1).

Решение:

$$4^{2-3x} < 8 \;\Rightarrow\; \left(2^2\right)^{2-3x} < 2^3 \;\Rightarrow\; 2^{4-6x} < 2^3.$$

Так как $2>1$, то $4-6x<3 \Rightarrow x>\frac{1}{6}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{6};\ +\infty\right)$.

Пример 3. Решите неравенство $0{,}2^x+5<2\cdot 0{,}2^x$.

Указание. Введите новую переменную и решите линейное неравенство. Вернитесь к переменной *x*. Представьте правую часть в виде степени с основанием 0,2. Сравните основание степени с единицей. Решите показательное неравенство, используя утверждение (2).

Решение:

$0{,}2^x+5<2\cdot 0{,}2^x$.

Пусть $y=0{,}2^x$, тогда $y+5<2y \Rightarrow -y<-5,\ y>5$.

Возвращаясь к переменной *x*, получим:

$0{,}2^x>5 \Rightarrow 0{,}2^x>(0{,}2)^{-1}$. Так как $0{,}2<1$, то $x<-1$.

Ответ: $(-\infty;\ -1)$.

Пример 4. Решите неравенство $0{,}7^{x^2+2}\geq 0{,}7^{2x^2+x-4}$.

Указание. Сравните основание степени с единицей. Воспользуйтесь утверждением (2). Решите квадратное неравенство.

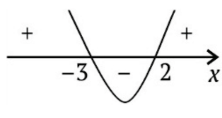
Решение:

$0{,}7^{x^2+2}\geq 0{,}7^{2x^2+x-4}$. Так как $0{,}7<1$, то $x^2+2\leq 2x^2+x-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+x-6\geq 0$.

Корни квадратного трехчлена: $x_1=-3$,

$x_2=2$.



Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup[2;\ +\infty)$.

Пример 5. Решите неравенство $9^x-4\cdot 3^x+3<0$.

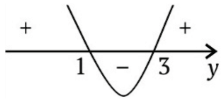
Указание. Введите новую переменную $y=3^x$. Решите квадратное неравенство относительно переменной *y*. Вернитесь к переменной *x*, сравнив основание степени с единицей.

Решение:

$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$. Пусть $y = 3^x$, тогда $y^2 - 4y + 3 < 0$.

Корни квадратного трехчлена:

$y_1 = 1,\ y_2 = 3$.



$1 < y < 3$.

Возвращаясь к переменной *x*, получим:

$1 < 3^x < 3 \quad \Rightarrow \quad 3^0 < 3^x < 3^1 \quad \Rightarrow$ так как $3 > 1$, то $0 < x < 1$.

Ответ: (0; 1).

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

Решите неравенства

1. $\left(\dfrac{1}{27}\right)^x < 3$
2. $4^{2-3x} < 0{,}25$
3. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} + 8 < 5 \cdot 2^x$
4. $0{,}2^{3x^2-2} \ge 0{,}2^{2x^2+x+4}$
5. $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 < 0$

Вариант 2

Решите неравенства

1. $\left(\dfrac{1}{64}\right)^x < 4$
2. $5^{3-4x} < 0{,}2$
3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x} - 4 \cdot 3^x < -27$
4. $0{,}1^{4x^2+3x} \ge 0{,}1^{3x^2+4}$
5. $4^x + 2^{x+1} > 80$

Вариант 3

Решите неравенства

1. $\left(\dfrac{1}{125}\right)^{2x} < 0{,}2$
2. $3{,}5^{3-2x} > \dfrac{4}{49}$
3. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-x} - 5 \cdot 5^x < -20$
4. $1{,}5^{5x^2-4x} \le 1{,}5^{4x^2-3}$
5. $36^x - 35 \cdot 6^x > 36$

Вариант 4

Решите неравенства

1. $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \le 7$
2. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-1} \le 0{,}5$
3. $17^{2x-1} - 17^{2x-2} > 16$
4. $2{,}89^{3x^2-12} \le 2{,}89^{2x^2-x}$
5. $4^x - 9 \cdot 2^x < -8$

Вариант 5

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{36}\right)^{-\frac{x}{3}} > 6$
2. $0{,}9^{-8x} > \left(\frac{10}{9}\right)^{7}$
3. $11^{3x-1} + 11^{3x-2} > 12$
4. $0{,}3^{x^2-4x} \geq \left(3\frac{1}{3}\right)^{-12}$
5. $3 \cdot 9^{x} - 28 \cdot 3^{x} + 9 < 0$

Вариант 6

Решите неравенства

1. $\left(\frac{4}{121}\right)^{-\frac{x}{2}} \leq \frac{2}{11}$
2. $4{,}5^{5-2x} < \frac{4}{81}$
3. $0{,}7^{4x-1} - 0{,}7^{4x-2} > -0{,}3$
4. $\left(\frac{10}{3}\right)^{7} \leq 0{,}3^{x^2-8x}$
5. $25^{x} - 4 \cdot 5^{x} < 5$

Вариант 7

Решите неравенства

1. $\left(\frac{9}{169}\right)^{-\frac{x}{2}} \geq \frac{3}{13}$
2. $4^{1-x} > 0{,}25$
3. $1{,}3^{5x-1} - 1{,}3^{5x-2} > 0{,}3$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{14x-x^2} > 9^{-6{,}5}$
5. $4^{x} - 3 \cdot 2^{x} < 40$

Вариант 8

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} > 27$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} < 16$
3. $2^{x} + 2^{x+3} \leq 18$
4. $3^{x^2-2x} \leq 27$
5. $2^{2x+1} - 2^{x+2} < 16$

Вариант 9

Решите неравенства

1. $4^{-x} \leq \frac{1}{16}$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} > 27$
3. $3^{2x-2} - 3^{2x-3} < \frac{2}{9}$
4. $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{1}{81}$
5. $9^{x} - 4 \cdot 3^{x} < -3$

Вариант 10

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} > 5$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-4} < 9$
3. $0{,}2^{6x-1} - 0{,}2^{6x} \geq 0{,}8$
4. $0{,}5^{x^2-x} > \frac{1}{4}$
5. $2 \cdot 4^{x} - 17 \cdot 2^{x} + 8 > 0$

Вариант 11

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} < 16$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} \le 8$

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} < \frac{4}{9}$

4. $0{,}4^{x^2-2x} < \left(\frac{5}{2}\right)^{6-3x}$

5. $9^x - 3^{x+1} > 54$

Вариант 12

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x} > 27$

2. $\left(\frac{1}{12}\right)^{3x-6} \ge 144$

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 3^{x+1} < 4$

4. $0{,}2^{4x^2-3} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2+x+3}$

5. $4^x - 3\cdot 2^x > 4$

Вариант 13

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < 9$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} > 16$

3. $6^{x-2} - 6^{x-1} \ge -180$

4. $0{,}1^{3x^2+3x} \le 10^{-2x^2-4}$

5. $9^x - 2\cdot 3^x > 3$

Вариант 14

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \le 8$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} \ge 81$

3. $3^{x+2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} \le 72$

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-5x^2} \le 1{,}5^{4x^2-3}$

5. $25^x - 6\cdot 5^x + 5 < 0$

Вариант 15

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{12}\right)^{3x} \ge 144$

2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{12-4x} < 16$

Вариант 16

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} \le 81$

2. $0{,}6^{3-2x} > 1$

3. $3^{3x+1} - 5\cdot 3^{3x-1} < 36$

3. $2^{x+3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}\geq 112$
4. $1{,}2^{3x^2+2x-10}\geq 1{,}44^{x^2-x+1}$
5. $9^x-6\cdot 3^x>270$

4. $0{,}7^{x^2-8x}>\left(\frac{10}{3}\right)^7$
5. $4^x-14\cdot 2^x<32$

Вариант 17

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{x}{3}}>16$
2. $\left(\frac{1}{13}\right)^{-2x+1}<\frac{1}{169}$
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}+4\cdot 3^{x+1}\geq 13$
4. $2^{x^2-14x}<\left(\frac{1}{4}\right)^{6{,}5}$
5. $9^x-8\cdot 3^x>9$

Вариант 18

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4x}<16$
2. $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x-5}>\frac{49}{4}$
3. $3\cdot 2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}\leq 12$
4. $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-x^2}\leq 125$
5. $16^x+3\cdot 4^{x+1}-64<0$

Вариант 19

Решите неравенства

1. $0{,}6^{-2x}>1$
2. $0{,}25^{4x-1}<4$
3. $7^{x+1}-3\cdot 7^{x-1}>46$
4. $0{,}8^{2x^2+x+4}\leq 0{,}8^{3x^2-2}$
5. $49^x-8\cdot 7^x+7<0$

Вариант 20

Решите неравенства

1. $\left(\frac{1}{13}\right)^{-2x}<\frac{1}{169}$
2. $3^{x-4}>\frac{1}{27}$
3. $2^{x+2}+7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}\leq 88$
4. $0{,}2^{x^2-4x}\geq 0{,}04^6$
5. $4^x-3\cdot 2^x>40$

Ответы к практикуму по теме «Показательные неравенства»

Варианты 1–5

Номер задания	Вариант				
	1	2	3	4	5
1	$\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$	$\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$	$\left(\frac{1}{6};\ +\infty\right)$	$(-\infty;\ 1]$	$(1{,}5;\ +\infty)$
2	$(1;\ +\infty)$	$(1;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 2{,}5)$	$\left[\frac{2}{3};\ +\infty\right)$	$\left(\frac{7}{8};\ +\infty\right)$
3	$(1;\ +\infty)$	$(2;\ +\infty)$	$(1;\ +\infty)$	$(1;\ +\infty)$	$\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$
4	$[-2;\ 3]$	$[-4;\ 1]$	$[1;\ 3]$	$[-4;\ 3]$	$[-2;\ 6]$
5	$(-\infty;\ 1)$	$(3;\ +\infty)$	$(2;\ +\infty)$	$(0;\ 3)$	$(-1;\ 2)$

Варианты 6–10

Номер задания	Вариант				
	6	7	8	9	10
1	$(-\infty;\ -1]$	$[-1;\ +\infty)$	$(1{,}5;\ +\infty)$	$[2;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -0{,}25)$
2	$(3{,}5;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0{,}5)$	$(-\infty;\ 7)$	$[7;\ +\infty)$	$(1;\ +\infty)$
3	$(0{,}5;\ +\infty)$	$(0{,}4;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 1]$	$(-\infty;\ 0{,}5)$	$\left[\frac{1}{6};\ +\infty\right)$
4	$[1;\ 7]$	$(-\infty;\ 1)\cup$ $\cup(13;\ +\infty)$	$[-1;\ 3]$	$[-0{,}5;\ 2]$	$(-1;\ 2)$
5	$(-\infty;\ 1)$	$(-\infty;\ 3)$	$(-\infty;\ 2)$	$(0;\ 1)$	$(-\infty;\ -1)\cup$ $\cup(3;\ +\infty)$

Варианты 11–15

Номер задания	Вариант				
	11	12	13	14	15
1	$\left(-1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$	$(-\infty;\ -0,75)$	$(-1;\ +\infty)$	$[-1,5;\ +\infty)$	$\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right]$
2	$[-3;\ +\infty)$	$\left(-\infty;\ -1\frac{1}{3}\right]$	$(7;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -7]$	$(-\infty;\ -3,5)$
3	$[0,4;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0)$	$(-\infty;\ 4]$	$(-\infty;\ 2]$	$[4;\ +\infty)$
4	$(-\infty;\ 2)\cup$ $\cup(3;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -2)\cup$ $\cup(3;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -4)\cup$ $\cup(1;\ +\infty)$	$[1;\ 3]$	$(-\infty;\ -6)\cup$ $\cup(2;\ +\infty)$
5	$(2;\ +\infty)$	$(2;\ +\infty)$	$(1;\ +\infty)$	$(0;\ 1)$	$(2;\ +\infty)$

Варианты 16–20

Номер задания	Вариант				
	16	17	18	19	20
1	$(-\infty;\ 8]$	$(12;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0,5)$	$(0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -1)$
2	$(1,5;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -0,5)$	$(-\infty;\ 1,5)$	$(0;\ +\infty)$	$(1;\ +\infty)$
3	$(-\infty;\ 1)$	$[0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 2]$	$(1;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 3]$
4	$(1;\ 7)$	$(1;\ 13)$	$[-1;\ 3]$	$(-\infty;\ -2]\cup$ $\cup[3;\ +\infty)$	$[-2;\ 6]$
5	$(-\infty;\ 4)$	$(2;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 1)$	$(0;\ 1)$	$(3;\ +\infty)$

3.4

Практикум по теме «Логарифмические уравнения»

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a>0,\ a\neq 1,$ называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8$$

Основные свойства логарифмов

1) $\log_a a = 1$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a a^b = b$

4) $a^{\log_a b} = b$ — основное логарифмическое тождество

5) $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$

6) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

7) $\log_a b^m = m\log_a b$

8) $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$

9) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

10) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Логарифмические уравнения — это уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где a — положительное число, отличное от 1) и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Теорема. Если $f(x)>0$ и $g(x)>0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a>0,\ a\neq 1,$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Эта операция называется *потенцированием.*

Рассмотрим решение нескольких уравнений.

Вариант 0

Пример 1. Решите уравнение $\log_5(5x-3)-1$.

Способ 1

Применим определение логарифма, получим уравнение:

$$5x-3=5^1 \quad \Rightarrow \quad 5x=8 \quad \Rightarrow \quad x=1{,}6.$$

Проверим найденные корни по условиям, определяющим область допустимых значений: $5x-3>0$.

$5\cdot 1{,}6-3>0$ — верно, следовательно, $x=1{,}6$ — корень заданного уравнения.

Ответ: $x=1{,}6$.

Способ 2

Представим единицу в виде логарифма по основанию 5:

$$\log_5(5x-3)=\log_5 5.$$

Потенцируя (т.е. освобождаясь от знаков логарифмов), получаем:

$$5x-3=5 \quad \Rightarrow \quad 5x=8 \quad \Rightarrow \quad x=1{,}6.$$

Проверим найденные корни по условиям, определяющим область допустимых значений: $5x-3>0$.

$5\cdot 1{,}6-3>0$ — верно, следовательно, $x=1{,}6$ — корень заданного уравнения.

Ответ: $x=1{,}6$.

Пример 2. Решите уравнение $\log_2(3x-2)-2=\log_2(x+5)$.

Решение

Потенцируя, получаем: $3x-2=x+5 \;\Rightarrow\; 2x=7 \;\Rightarrow\; x=3{,}5$.

Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x-2>0 \\ x+5>0 \end{cases}$$

$x=3{,}5$ удовлетворяет этой системе неравенств, следовательно, $x=3{,}5$ — корень заданного уравнения.

Ответ: $x=3{,}5$.

Пример 3. Решите уравнение $\log_3(2x+3)-3=\log_3(x+1)$.

Решение

Перенесем 3 вправо: $\log_3(2x+3)=\log_3(x+1)+3$.

Представим 3 в виде логарифма по основанию 3:

$$\log_3(2x+3)=\log_3(x+1)+\log_3 27.$$

Применим свойство логарифмов (сумма логарифмов равна логарифму произведения):

$$\log_3(2x+3)=\log_3\left(27(x+1)\right).$$

Потенцируя, получаем:

$$2x+3=27x+27 \quad\Rightarrow\quad -25x=24 \quad\Rightarrow\quad x=-0{,}96.$$

Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ x+1>0 \end{cases}$$

$x=-0{,}96$ удовлетворяет этой системе неравенств, следовательно, $x=-0{,}96$ — корень заданного уравнения.

Ответ: $x=-0{,}96$.

Пример 4. Решите уравнение: $\log_{0,5}^2 x-5\log_{0,5} x+4=0$.

Решение

Введем новую переменную: обозначим $\log_{0,5} x=t$, получим квадратное уравнение:

$$t^2-5t+4=0.$$

Найдем дискриминант квадратного уравнения:

$$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=9.$$

Так как дискриминант больше нуля, то квадратное уравнение имеет два действительных корня:

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{5\pm 3}{2\cdot 1};\ t_1=4,\ t_2=1.$$

Произведем обратную замену:

$$\log_{0,5} x=4,\ \log_{0,5} x=1.$$

Применив определение логарифма, получим уравнение:

$$x=0{,}5^4 \text{ и } x=0{,}5^1 \quad\Rightarrow\quad x=0{,}0625 \text{ и } x=0{,}5.$$

Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ: $x > 0$. Оба корня удовлетворяют данному неравенству, значит, являются корнями уравнения.

Ответ: $x = 0{,}0625$ и $x = 0{,}5$.

Пример 5. Решите уравнение $\log_4\left(x^2+3x\right)-\log_4(x-3)=$ $=\log_4(x+2)$.

Решение

Перенесем $\log_4(x-3)$ в правую часть:

$$\log_4\left(x^2+3x\right)=\log_4(x+2)+\log_4(x-3).$$

Применим свойство логарифмов (сумма логарифмов равна логарифму произведения):

$$\log_4\left(x^2+3x\right)=\log_4(x+2)(x-3).$$

Потенцируя, получаем:

$$x^2+3x=(x+2)\cdot(x-3).$$

Раскроем скобки в правой части:

$$x^2+3x=x^2-x-6.$$

Перенесем все слагаемые с x влево:

$$x^2+3x-x^2+x=-6 \;\;\Rightarrow\;\; 4x=-6 \;\;\Rightarrow\;\; x=-1{,}5.$$

Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2+3x>0 \\ x-3>0 \\ x+2>0 \end{cases}$$

Значение $x=-1{,}5$ не удовлетворяет этой системе неравенств, так как не удовлетворяет первому и второму неравенствам. Следовательно, уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

Решите уравнения

1. $\log_3(4x-9)=1$
2. $\log_3(2x-4)=\log_3(x+7)$
3. $\log_4(x-3)-1=\log_4(x-6)$
4. $\log_2^2 x-4\log_2 x+3=0$
5. $\log_4\left(7-x^2\right)-\log_4(1-2x)=$ $=\log_4(x-3)$

Вариант 2

Решите уравнения

1. $\log_3(2x-7)=1$
2. $\log_4(2x-1)=\log_4(3x-3)$
3. $\log_3(x-2)+2=\log_3 x$
4. $\log_4^2 x-\log_4 x-2=0$
5. $\log_3\left(16-x^2\right)-\log_3(x+2)=$ $=\log_3(7-2x)$

Вариант 3

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)=-1$
2. $\log_7(4x+3)=\log_7(x+6)$
3. $\log_8(2x+62)=2+\log_8 x$
4. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x+3\log_{\frac{1}{2}} x+2=0$
5. $\log_2\left(3x-x^2\right)-\log_2(2x-3)=$ $=\log_2(-x-1)$

Вариант 4

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)=-1$
2. $\log_5(2x+3)=\log_5(x+5)$
3. $\log_2(x+1)=1+\log_2 x$
4. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x+\log_{\frac{1}{5}} x-6=0$
5. $\log_7\left(12-x^2\right)-\log_7(2-x)=$ $=\log_7(2x+9)$

Вариант 5

Решите уравнения

1. $\log_2(3x-7)=1$
2. $\log_2(3x+4)=\log_2(x+6)$
3. $\log_3(x+1)=1+\log_3 x$
4. $2\log_5^2 x+5\log_5 x+2=0$
5. $\log_5\left(16-2x^2\right)-\log_5(x+2)=$ $=\log_5(8-x)$

Вариант 6

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-7)=-1$
2. $\log_2(4x+1)=\log_2(3x+7)$
3. $\log_5(4x+2)=1+\log_5 x$
4. $3\log_4^2 x-7\log_4 x+2=0$
5. $\log_3\left(26-2x^2\right)-\log_3(-2-x)=$ $=\log_3(x+1)$

Вариант 7

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=-1$
2. $\log_5(4x+2)=\log_5(5x)$
3. $\log_4(x-1)+2=\log_4(14x-6)$
4. $2\log_{0,3}^2 x-7\log_{0,3} x-4=0$
5. $\log_3\left(27-x^2\right)-\log_3(x+3)=$
$=\log_3(11-2x)$

Вариант 8

Решите уравнения

1. $\log_5(2x+1)=1$
2. $\log_6(x+1)=\log_6(3x-6)$
3. $\log_2(x-1)+3=\log_2 x$
4. $3\log_{0,5}^2 x+5\log_{0,5} x-2=0$
5. $\log_2\left(x^2-4x\right)-\log_2(2x+7)=$
$=\log_2(x+2)$

Вариант 9

Решите уравнения

1. $\log_4(3x+12)=1$
2. $\log_7(x+1)=\log_7(2x-3)$
3. $\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=1$
4. $2\log_5^2 x+5\log_5 x-7=0$
5. $\log_2\left(x^2+6x\right)-\log_2(2x+3)=$
$=\log_2(x-4)$

Вариант 10

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{4}}(6-5x)=-1$
2. $\log_2(5x-2)=\log_2(7-2x)$
3. $\log_{\frac{1}{2}}(4x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(7x-3)+1$
4. $4\log_2^2 x-15\log_2 x-4=0$
5. $\log_3\left(16-x^2\right)-\log_3(x-4)=$
$=\log_3(-2x-1)$

Вариант 11

Решите уравнения

1. $\log_5(4x-7)=1$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$
3. $\log_2(8-3x)=\log_2(x+9)+2$
4. $\log_3^2 x-4\log_3 x+3=0$
5. $\log_2\left(27-x^2\right)-\log_2(11-2x)=$
$=\log_2(x+3)$

Вариант 12

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{5}}(7x+8)=-1$
2. $\log_2(2x-2)=\log_2(6-5x)$
3. $\log_{\frac{1}{3}} x+1=\log_{\frac{1}{3}}(4-x)$
4. $\log_4^2 x-\log_4 x-2=0$
5. $\log_3\left(x^2+8\right)-\log_3(2x+1)=$
$=\log_3(x-2)$

Вариант 13

Решите уравнения

1. $\log_2(7-2x)=1$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(5x-2)=\log_{\frac{1}{2}}(3-2x)$
3. $\log_6(7-x)+\log_6 x=1$
4. $\log^2_{\frac{1}{3}} x+3\log_{\frac{1}{3}} x+2=0$
5. $\log_3\left(25-x^2\right)-\log_3(9-2x)=$
   $=\log_3(x+5)$

Вариант 14

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{2}}(3-2x)=-1$
2. $\log_3(x+1)=\log_3(6-2x)$
3. $\log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}}(10-x)=-2$
4. $\log^2_5 x+\log_5 x-6=0$
5. $\log_3\left(32-2x^2\right)-\log_3(6-x)=$
   $=\log_3(x+5)$

Вариант 15

Решите уравнения

1. $\log_2(6-5x)=1$
2. $\log_{\frac{1}{3}}(4+4x)=\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$
3. $\log_4(3x-5)-1=\log_4(x+4)$
4. $2\log^2_{\frac{1}{2}} x+10\log_{\frac{1}{2}} x+12=0$
5. $\log_3\left(18-x^2\right)-\log_3(4-x)=$
   $=\log_3(2x+3)$

Вариант 16

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{2}}(1-3x)=-1$
2. $\log_3(2x-7)=\log_3(x+2)$
3. $\log_5(x+7)=\log_5(3x-1)+1$
4. $2\log^2_{\frac{1}{7}} x-9\log_{\frac{1}{7}} x+9=0$
5. $\log_4\left(x^2+8\right)-\log_4(x-2)=$
   $=\log_4(2x+1)$

Вариант 17

Решите уравнения

1. $\log_2(2-5x)=1$
2. $\log_{\frac{1}{5}}(7x-1)=\log_{\frac{1}{5}}(2-3x)$
3. $\log_3(x-1)+2=\log_3(2x-14)$
4. $4\log^2_{0,5} x-9\log_{0,5} x+2=0$
5. $\log_2\left(12-2x^2\right)-\log_2(2-x)=$
   $=\log_2(x+6)$

Вариант 18

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=-1$
2. $\log_7(4x+3)=\log_7(2-5x)$
3. $\log_2(5x-1)-2=\log_2(x+1)$
4. $3\log^2_{\frac{1}{9}} x-28\log_{\frac{1}{9}} x+9=0$
5. $\log_2\left(2+x-x^2\right)-\log_2(x-1)=$
   $=\log_2(x+1)$

Вариант 19

Решите уравнения

1. $\log_4(3x+7)=2$
2. $\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=\log_{\frac{1}{3}}(4x-7)$
3. $\log_2(7x+1)-3=\log_2 x$
4. $4\log^2_{\frac{1}{2}} x-5\log_{\frac{1}{2}} x-6=0$
5. $\log_3\left(21-x^2\right)-\log_3(3-x)=$
   $=\log_3(2x+8)$

Вариант 20

Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{4}}(5x-9)=-2$
2. $\log_5(3x-7)=\log_5(3-x)$
3. $\log_{\frac{1}{2}}(2x+5)-1=\log_{\frac{1}{2}}(6x-4)$
4. $\log^2_2 x-7\log_2 x+10=0$
5. $\log_{\frac{1}{3}}\left(53-2x^2\right)-\log_{\frac{1}{3}}(x+3)=$
   $=\log_{\frac{1}{3}}(7-x)$

Ответы к практикуму по теме «Логарифмические уравнения»

Варианты 1–5

Номер задания	Вариант				
	1	2	3	4	5
1	3	5	2,5	2	3
2	11	2	1	2	1
3	7	2,25	1	1	0,5
4	2; 8	0,25; 16	2; 4	0,04; 125	0,04; $\frac{\sqrt{5}}{5}$
5	$\varnothing$	1; 2	$\varnothing$	1	0

Варианты 6–10

Номер задания	Вариант				
	6	7	8	9	10
1	5	1	2	$-\frac{8}{3}$	0,4
2	6	2	3,5	4	$\frac{9}{7}$
3	2	5	$\frac{8}{7}$	2	$\varnothing$
4	$\sqrt[3]{4};\ 16$	$\frac{1}{\sqrt{0,3}};\ (0,3)^4$	$\sqrt[3]{0,5};\ 4$	$\frac{\sqrt{5}}{625};\ 5$	$\frac{1}{\sqrt[16]{2}};\ 16$
5	$\varnothing$	–1	–1	12	$\varnothing$

Варианты 11–15

Номер задания	Вариант				
	11	12	13	14	15
1	3	$-\frac{3}{7}$	2,5	0,5	0,8
2	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{3}$	–0,4
3	–4	3	1; 6	1; 9	$\varnothing$
4	3; 27	0,25; 16	3; 9	$\frac{1}{125};\ 25$	4; 8
5	–1	5	4	–2; 1	2; 3

Варианты 16–20

Номер задания	Вариант				
	16	17	18	19	20
1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	3	5
2	9	0,3	$-\frac{1}{9}$	5	2,5
3	$\frac{6}{7}$	$\varnothing$	5	1	7
4	$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{2}};\ \left(\frac{1}{7}\right)^{3}$	$\sqrt[4]{0,5};\ 0,25$	$\sqrt[3]{\frac{1}{9}};\ \left(\frac{1}{9}\right)^{9}$	$-2;\ \frac{1}{64}$	4; 32
5	5	0	1,5	–3; 1	4

3.5

Практикум по теме «Логарифмические неравенства»

Логарифмические неравенства — это неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ (где a — положительное число, отличное от 1) и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Теорема. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) >$ $> \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$; при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) >$ $> \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$.

Вариант 0

Пример 1

Решите неравенство $\log_5(2x+3) < 1$.

Решение

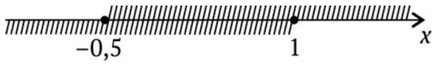
Представим 1 в виде логарифма по основанию 5:

$$\log_5(2x+3)<\log_5 5.$$

Учитывая, что основанием логарифма является число, большее 1, составляем равносильную заданному неравенству систему неравенств:

$$\begin{cases}2x+3>0,\\ 2x+3<5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>-1{,}5,\\ x<1\end{cases}$$

Отметим на числовой прямой эти решения и найдем их пересечения:



Ответ: $x \in (-1{,}5;\ 1)$.

Пример 2

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4)>\log_{\frac{1}{3}}(14-x)$.

Решение

Учитывая, что основанием логарифма является число, меньшее 1, составляем равносильную заданному неравенству систему неравенств:

$$\begin{cases}2x-4>0,\\ 14-x>0,\\ 2x-4<14-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>2,\\ x<14,\\ x<6\end{cases}$$

Отметим на числовой прямой эти решения и найдем их пересечения:

Ответ: $2<x<6$.

Пример 3

Решите неравенство $\log_{0,5}(2x+4)-\log_{0,5}(x-2)<2$.

Решение

Представим 2 в виде логарифма по основанию 0,5:

$$\log_{0,5}(2x+4)-\log_{0,5}(x-2)<\log_{0,5}0{,}25.$$

Перенесем $\log_{0,5}(x-2)$ вправо:

$$\log_{0,5}(2x+4)<\log_{0,5}0{,}25+\log_{0,5}(4x-2).$$

Применим свойство логарифмов (сумма логарифмов равна логарифму произведения):

$$\log_{0,5}(2x+4)<\log_{0,5}\left(0{,}25(4x-2)\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log_{0,5}(2x+4)<\log_{0,5}(x-0{,}5).$$

Учитывая, что основанием логарифма является число, меньшее 1, составляем равносильную заданному неравенству систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x+4>0, \\ x-2>0, \\ 2x+4>x-0{,}5 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x>-2, \\ x>2, \\ x>-4{,}5 \end{cases}$$

Обратим внимание, что если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняются два других неравенства. Значит, это и будет решение системы.

Ответ: $x>2$.

Пример 4

Решите неравенство $\log_2^2 x-6\log_2 x+8\le 0$.

Решение

Введем новую переменную: обозначим $\log_2 x=t$, получим квадратное неравенство:

$$t^2-6t+8\le 0.$$

Для решения квадратного неравенства решим квадратное уравнение:

$$t^2-6t+8=0.$$

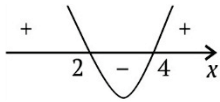
Найдем дискриминант квадратного уравнения:

$$D=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 8=4.$$

Так как дискриминант больше нуля, то квадратное уравнение имеет два действительных корня:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 2}{2 \cdot 1};\ t_1 = 4,\ t_2 = 2.$$

Определимся с решением неравенства:



Значит, решением квадратного неравенства будет промежуток $2 \le t \le 4$.

Произведем обратную замену: $2 \le \log_2 x \le 4$.

Представим числа в виде логарифма по основанию 2:

$$\log_2 4 \le \log_2 x \le \log_2 16.$$

«Освободимся» от знаков логарифмов, сохранив имеющиеся знаки неравенств (так как основание логарифма больше 1): $4 \le x \le 16$.

Учитывая, что x принимает положительные значения по определению логарифма, запишем ответ.

Ответ: $x \in [4;\ 16]$.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

Решите неравенства

1. $\log_2(8-x) < 1$
2. $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \ge \log_{\frac{1}{3}}(3-x)$
3. $\log_2 x + \log_2(x-1) \le 1$
4. $\log_3^2 x - \log_3 x > 0$

Вариант 2

Решите неравенства

1. $\log_{\frac{1}{2}}(5x-8) > 1$
2. $\log_2(2x-2) > \log_2(6-5x)$
3. $\log_3(x-2) - \log_3(x-3) < 1$
4. $\log_4^2 x + \log_4 x < 0$

Вариант 3

Решите неравенства

1. $\log_3(4x-9)<1$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)<\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$
3. $\log_2(2+x)-\log_2(2-x)<1$
4. $3\log^2_{\frac{1}{2}}x+5\log_{\frac{1}{2}}x-2>0$

Вариант 4

Решите неравенства

1. $\log_{\frac{1}{4}}(3x-5)<-1$
2. $\log_2(5x-9)\le\log_2(3x+1)$
3. $\log_8 x+\log_8(x-7)>1$
4. $\log^2_{\frac{1}{2}}x-5\log_{\frac{1}{2}}x+6<0$

Вариант 5

Решите неравенства

1. $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x)<0$
2. $\log_2(4x+1)<\log_2(2x+5)$
3. $\log_8(x-3)+\log_8(x-1)<1$
4. $2\log^2_5 x+5\log_5 x+2\ge 0$

Вариант 6

Решите неравенства

1. $\log_4(5x+1)>1$
2. $\log_{0,2}(4x-1)<\log_{0,2}(x+1)$
3. $\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{10}{9}-x\right)\ge 2$
4. $3\log^2_4 x-7\log_4 x+2<0$

Вариант 7

Решите неравенства

1. $\log_3(2x-7)<1$
2. $\log_{\frac{1}{3}}(-x)>\log_{\frac{1}{3}}(4-2x)$
3. $\log_4(2-x)+\log_4(x+1)>\frac{1}{2}$
4. $\log^2_{\frac{1}{3}}x+2\log_{\frac{1}{3}}x-3<0$

Вариант 8

Решите неравенства

1. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)>1$
2. $\log_2(5x-2)>\log_2(7-2x)$
3. $\log_{\frac{1}{2}}(x-4)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>2$
4. $\lg^2 x+2\lg x>0$

Вариант 9

Решите неравенства

1. $\log_5(3x+1)>1$
2. $\log_{0,4}(6x+1)\ge\log_{0,4}(5x+8)$
3. $\log_5(5x-3)-\log_5(x+2)>0$
4. $\log^2_{\frac{1}{3}}x+3\log_{\frac{1}{3}}x<0$

Вариант 10

Решите неравенства

1. $\log_3(12x-7)>2$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(3x+2)\le\log_{\frac{1}{2}}(6x-7)$
3. $\log_6 x+\log_6(x-5)>1$
4. $\log^2_{\frac{1}{3}}x+3\log_{\frac{1}{3}}x-4>0$

Вариант 11

Решите неравенства

1. $\log_3(5x+3)>1$
2. $\log_{0,5}(5x-2)<\log_{0,5}(3-2x)$
3. $\log_2(2+x)-\log_2(2-x)<1$
4. $2\log_2^2 x-7\log_2 x-4\le 0$

Вариант 12

Решите неравенства

1. $\log_{\frac{1}{3}}(3x-4)\ge -1$
2. $\log_{2,5}(6-x)<\log_{2,5}(4-3x)$
3. $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<1$
4. $\log_2^2 x-\log_2 x-12\le 0$

Вариант 13

Решите неравенства

1. $\log_{0,3}(x-4)<0$
2. $\log_2(3x-1)<\log_2(x+1)$
3. $\log_{\frac{1}{2}}(x-4)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>-2$
4. $\log_3^2 x+2\log_3 x-8>0$

Вариант 14

Решите неравенства

1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)\ge -1$
2. $\log_2(4x+1)<\log_2(2x+5)$
3. $\lg(x-2)+\lg(x+1)<1$
4. $2\log_{\frac{1}{2}}^2 x-5\log_{\frac{1}{2}} x+2>0$

Вариант 15

Решите неравенства

1. $\log_2(10x-9)<0$
2. $\log_{0,5}(3x-4)<\log_{0,5}(x-2)$
3. $\log_5(5x-3)-\log_5(x+2)<1$
4. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x-3\log_{\frac{1}{2}} x-4>0$

Вариант 16

Решите неравенства

1. $\log_{\frac{1}{4}}(4x-3)>-1$
2. $\log_5(5x-4)<\log_5(3x-2)$
3. $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)<-1$
4. $\log_2^2 x-\log_2 x-2<0$

Вариант 17

Решите неравенства

1. $\log_3(6x-5)>2$
2. $\log_{0,6}(7x-4)<\log_{0,6}(5x-2)$
3. $\log_{0,3}(5x-1)-\log_{0,3}(2-3x)>0$
4. $\log_2^2 x-7\log_2 x+12>0$

Вариант 18

Решите неравенства

1. $\log_{\frac{1}{3}}(5x-9)\ge -2$
2. $\log_6(15x-14)<\log_6(13x-12)$
3. $\log_4 x+\log_4(x+3)>1$
4. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x-2\log_{\frac{1}{2}} x-3<0$

Вариант 19

Решите неравенства

1. $\log_{0,1}(8x+3)>0$
2. $\log_3(3x+1)>\log_3(x-3)$
3. $\log_{0,5}(5x-3)-\log_{0,5}(x+2)<1$
4. $\log_2^2 x-6\log_2 x+5>0$

Вариант 20

Решите неравенства

1. $\lg(5x+8)<2$
2. $\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)<\log_{\frac{1}{3}}(5x+2)$
3. $\log_5(x-3)+\log_5(x+1)>1$
4. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x+4\log_{\frac{1}{2}} x-5<0$

Ответы к практикуму по теме «Логарифмические неравенства»

Варианты 1–5

Номер задания	Вариант				
	1	2	3	4	5
1	$(6;\ 8)$	$(1{,}6;\ 1{,}7)$	$(2{,}25;\ 3)$	$(3;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 2)$
2	$(-1;\ 1]$	$\left(\frac{8}{7};\ \frac{3}{5}\right)$	$(1;\ 3)$	$(1{,}8;\ 5]$	$\left(-\frac{1}{4};\ 2\right)$
3	$(1;\ 2]$	$(3{,}5;\ +\infty)$	$\left(-2;\ \frac{2}{3}\right)$	$(8;\ +\infty)$	$(3;\ 5)$
4	$(0;\ 1)\cup$ $\cup(3;\ +\infty)$	$\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$	$\left(0;\ \sqrt[3]{0{,}5}\right)\cup$ $\cup(4;\ +\infty)$	$\left(\frac{1}{8};\ \frac{1}{4}\right)$	$\left(0;\ \frac{1}{25}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\ +\infty\right)$

Варианты 6–10

Номер задания	Вариант				
	6	7	8	9	10
1	$(0{,}6;\ +\infty)$	$(3{,}5;\ 5)$	$(1{,}5;\ 1{,}75)$	$\left(\frac{4}{3};\ +\infty\right)$	$\left(\frac{7}{6};\ +\infty\right)$
2	$\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$	$(-\infty;\ 0)$	$\left(\frac{9}{7};\ \frac{7}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{6};\ 7\right]$	$\left(\frac{7}{6};\ 3\right]$
3	$\left(-\infty;\ \frac{1}{9}\right]\cup\left[1;\ \frac{10}{9}\right)$	$(0;\ 1)$	$\left(4;\ \frac{17}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$	$(6;\ +\infty)$
4	$\left(\sqrt[3]{4};\ 16\right)$	$\left(\frac{1}{3};\ 27\right)$	$(0;\ 0{,}01)\cup$ $\cup(1;\ +\infty)$	$(1;\ 27)$	$\left(0;\ \frac{1}{3}\right)\cup$ $\cup(81;\ +\infty)$

Варианты 11–15

Номер задания	Вариант				
	11	12	13	14	15
1	$(0;\ +\infty)$	$\left(\frac{4}{3};\ \frac{7}{3}\right]$	$(5;\ +\infty)$	$(2{,}5;\ 4]$	$(0{,}9;\ 1)$
2	$\left(\frac{5}{7};\ \frac{3}{2}\right)$	$(-\infty;\ -1)$	$\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$	$\left(-\frac{1}{4};\ 2\right)$	$(2;\ +\infty)$
3	$\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$	$(5;\ +\infty)$	$(4;\ +\infty)$	$(2;\ 4)$	$\left(\frac{3}{5};\ +\infty\right)$
4	$\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ 16\right]$	$\left[\frac{1}{8};\ 16\right]$	$\left(0;\ \frac{1}{81}\right)\cup$ $\cup(9;\ +\infty)$	$\left(0;\ \frac{1}{4}\right)\cup$ $\cup\left(\sqrt{0{,}5};\ +\infty\right)$	$\left(0;\ \frac{1}{16}\right)\cup$ $\cup(2;\ +\infty)$

Варианты 16–20

Номер задания	Вариант				
	16	17	18	19	20
1	$\left(\frac{3}{4};\ \frac{7}{4}\right)$	$\left(\frac{7}{3};\ +\infty\right)$	$(1{,}8;\ 3{,}6]$	$\left(-\frac{5}{8};\ -\frac{1}{2}\right)$	$(-1{,}6;\ 18{,}4)$
2	$\left(\frac{4}{5};\ 1\right)$	$(1;\ +\infty)$	$\left(\frac{14}{15};\ 1\right)$	$(3;\ +\infty)$	$\left(\frac{2}{3};\ 2\right)$
3	$(2;\ +\infty)$	$\left(\frac{1}{5};\ \frac{3}{8}\right)$	$(1;\ +\infty)$	$\left(\frac{8}{9};\ +\infty\right)$	$(4;\ +\infty)$
4	$\left(\frac{1}{2};\ 4\right)$	$(0;\ 8)\cup$ $\cup(16;\ +\infty)$	$\left(\frac{1}{8};\ 2\right)$	$(0;\ 2)\cup$ $\cup(32;\ +\infty)$	$\left(\frac{1}{2};\ 32\right)$

3.6

Практикум по теме «Производная»

Производная функции — одно из основных понятий математики. Процесс нахождения производной называется *дифференцированием*. Обратная операция — восстановление функции по известной производной — называется *интегрированием*.

Определение производной

Рассмотрим функцию $f(x)$, область определения которой содержит некоторый открытый интервал вокруг точки x_0. Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 и ее производная определяется формулой:

$$f'(x_0) = \lim \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Производные элементарные функции

- Постоянная: $(C)' = 0,\ C = const$
- Степенная: $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},\ \alpha \in R$
- Показательная: $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a,\ a > 0,\ a \neq 1$
- Экспоненциальная: $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$
- Синус: $(\sin x)' = \cos x$
- Косинус: $(\cos x)' = -\sin x$
- Тангенс: $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
- Котангенс: $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi k,\ k \in Z$
- Логарифмическая: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
- Натуральный логарифм: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0$

Геометрический и механический смыслы производной

Геометрический смысл производной состоит в существовании в точке x_0 графика непрерывной функции *f*(*x*) невертикальной касательной, угловой коэффициент которой равен тангенсу угла наклона касательной с положительным направлением оси абсцисс $k + \mathrm{tg}\,\alpha = f'(x_0)$.

Механический смысл производной состоит в том, что $S'(t) = v(t),\ V'(t) = a(t)$.

Основные правила вычисления производных

- Производная суммы функций: $(f + g)' = f' + g'$
- Производная разности функций: $(f - g)' = f' - g'$

- Производная произведения функций: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- Производная частного функций: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \ g \neq 0$
- Производная сложной функции: $\left(g\left(f(x)\right)\right)' = g'(y)f'(x)$

Вариант 0

Пример 1

Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3$, $x_0 = -2$?

Решение

Используя геометрический смысл производной, находим производную функции $g(x)$ и ее значение в точке с абсциссой x_0:

$$g'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3\right)' = -\frac{1}{3}\cdot\left(x^3\right)' = -\frac{1}{3}\cdot 3x^2 = -x^2;$$

$$k = g'(-2) = -(-2)^2 = -4.$$

Ответ: –4.

Пример 2

Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3$, $x_0 = -1$?

Решение

Используя геометрический смысл производной, находим производную функции $g(x)$ и ее значение в точке с абсциссой x_0:

$$g'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3\right)' = -\frac{1}{3}\cdot\left(x^3\right)' = -\frac{1}{3}\cdot 3x^2 = -x^2;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = g'(-1) = -(-1)^2 = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ.$$

Ответ: 1350.

Пример 3

Найдите абсциссы точек графика функции $y=-\frac{1}{3}x^3-2x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси Ox или совпадает с ней.

Решение

Условие параллельности прямых — равенство угловых коэффициентов. Используя геометрический смысл производной, находим производную функции $y(x)$ и значения аргумента, при которых значение производной равно нулю.

$$y'(x)=\left(-\frac{1}{3}x^3-2x^2\right)'=\left(-\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(2x^2\right)'=-x^2-4x$$

$$-x^2-4x=0$$

$$x=-4,\ x=0$$

Ответ: – 4; 0.

Пример 4

Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y=h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x)=4\sin x+e^x$, $x_0=0$?

Решение

Используя геометрический смысл производной, находим производную функции $h(x)$ и ее значение в точке с абсциссой x_0:

$$h'(x)=\left(4\sin x+e^x\right)'=4\cos x+e^x;\ k=h'(0)=4\cos 0+e^0=4+1=5.$$

Ответ: 5.

Пример 5

Чему равен угол между касательной к графику функции $y=h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x)=-\frac{1}{7x^7}$, $x_0=1$?

Решение

Используя геометрический смысл производной, находим производную функции $h(x)$ и ее значение в точке с абсциссой x_0:

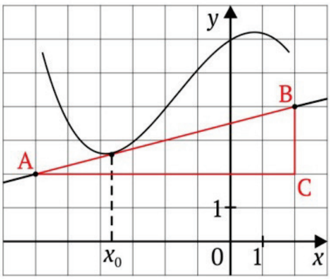
$$h'(x)=\left(-\frac{1}{7x^7}\right)'=-\frac{1}{7}\cdot\left(x^{-7}\right)'=-\frac{1}{7}\cdot\left(-7x^{-8}\right)=x^8;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=h'(1)=(1)^{-8}=1\Rightarrow\alpha=45°.$$

Ответ: 450.

Пример 6

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.



Решение

Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке x_0 ($f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$). Достроив до прямоугольного треугольника ABC, получим:

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{8}=0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Пример 7

Найдите точки графика функции $y=g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k, если $g(x)=\sqrt{-2x-3}$, $k=-\frac{1}{3}$.

Решение

Используя геометрический смысл производной, находим производную функции $g(x)$ и значения аргумента, при которых значение производной равно k.

$$g'(x)=\left(\sqrt{-2x-3}\right)'=\left((-2x-3)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{-2}{2\left(\sqrt{-2x-3}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{-2x-3}};$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-2x-3}}=-\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad -2x-3=3\quad\Rightarrow\quad x=-6,\ y=g(-6)=3$$

Ответ: (–6; 3).

Пример 8

Прямая $y=2x+1$ является касательной к графику функции $y=-3x^2+kx-2$. Найти k, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение

Поскольку прямая $y=2x+1$ является касательной к графику функции $y=-3x^2+kx-2$, должны быть выполнены следующие условия:

- уравнение $y=-3x^2+kx-2=2x+1$ имеет единственный корень (x_0);
- значение производной функции $y=-3x^2+kx-2$ в точке с абсциссой x_0 равно 2.

$$-3x^2+(k-2)x-3=0;$$

$$D=(k-2)^2-4\cdot(-3)\cdot(-3)=(k-2)^2-36=0;$$

$$(k-2)^2=36.$$

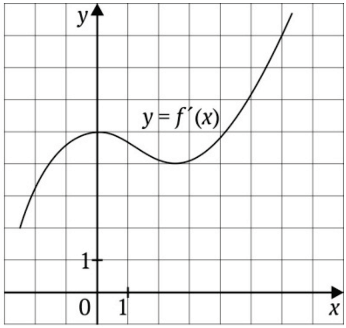
$$k=-4,\ k=8.$$

$$y'=\left(-3x^2+kx-2\right)'=-6x+k=2;\ x=\frac{k-2}{6}.$$

При $k=-4$, $x=-1$ — не удовлетворяет условию (абсцисса точки касания больше 0).

При $k=8,\ x=1$ — удовлетворяет условию (абсцисса точки касания больше 0).

Ответ: 8.



Пример 9

На рисунке изображен график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f'(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 7$ или совпадает с ней.

Решение

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой или совпадает с ней, ее угловой коэффициент равен 3. Значит, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент равен 3, а значит, и производная равна 3. Поэтому искомая точка $x = -2$.

Ответ: –2.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y=g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x)=3x^2$, $x_0=1$?

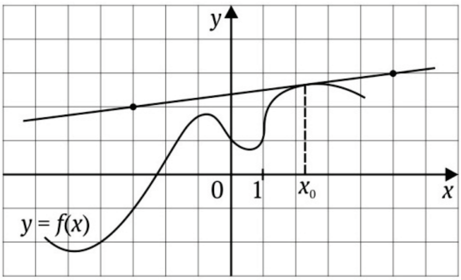
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y=g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x)=0{,}5x^2$, $x_0=-1$?

3. Найдите абсциссы точек графика функции $y=x^3-3x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси Ox или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = \ln(2x+1)$, $x_0 = 0$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \dfrac{1}{4x^4}$, $x_0 = 1$?

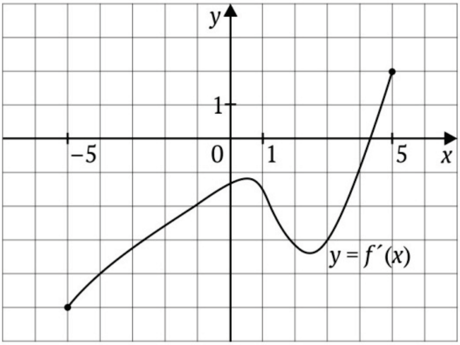
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



7. Найдите точки графика функции $y = g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k, если $g(x) = \sqrt{5x+1}$, $k = \dfrac{5}{8}$.

8. Прямая $y = 3x + 2$ является касательной к графику функции $y = -12x^2 + kx - 10$. Найдите k, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

9. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (−5; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. В ответ запишите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные наклонены под углом 120° к положительному направлению оси абсцисс.



Вариант 2

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = 2x^3$, $x_0 = 1$?

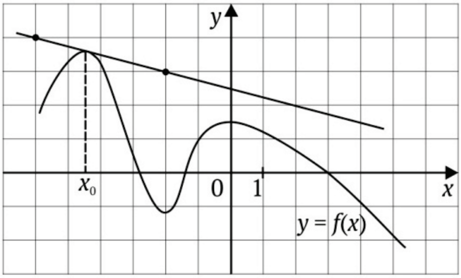
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = 0{,}25x^4$, $x_0 = 1$?

3. Найдите абсциссы точек графика функции $y = x^3 + 3x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = e^{2x}$, $x_0 = 0$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = \dfrac{1}{2x^2}$, $x_0 = 1$?

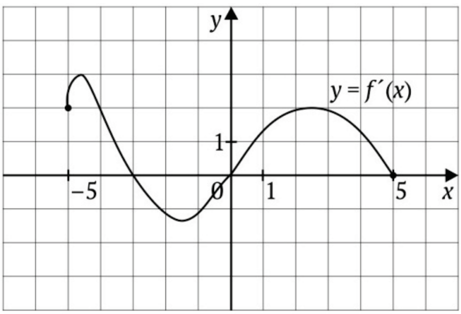
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



7. Найдите точки графика функции $y = g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $g(x) = \sqrt{3x+1}$, $k = \frac{3}{4}$.

8. Прямая $y = -2x - 4$ является касательной к графику функции $y = 16x^2 + kx + 12$. Найдите k, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

9. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–5; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные наклонены под углом 150° к положительному направлению оси абсцисс.



Вариант 3

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = 3x^3$, $x_0 = -1$?

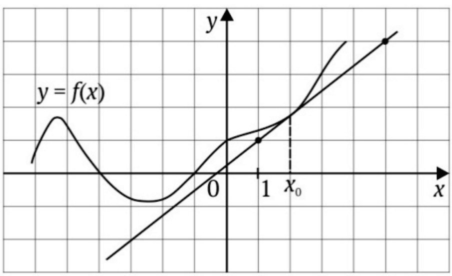
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = -0{,}5x^2$, $x_0 = 1$?

3. Найдите абсциссы точек графика функции $y = 2x^3 + x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = 5e^{x+2}$, $x_0 = -2$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = \dfrac{1}{5x^5}$, $x_0 = 1$?

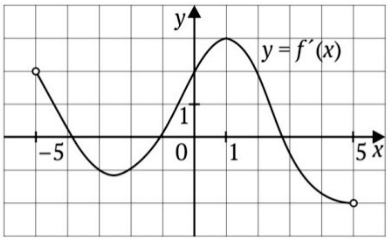
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



7. Найдите точки графика функции $y = g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $g(x) = \sqrt{2x+7}$, $k = \dfrac{1}{3}$.

8. Прямая $y = -2x+5$ является касательной к графику функции $y = kx^2 + 2x + 7$. Найдите k.

9. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–5; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции $y = f(x)$ провели касательные в точках, абсциссы которых — целые числа. В ответ запишите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых проведенные касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.



Вариант 4

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = x^3$, $x_0 = -2$?

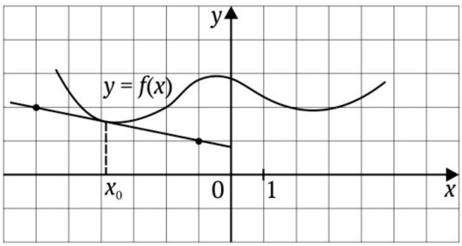
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = 2x^2$, $x_0 = 0$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 1$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = \ln(x+1) + 2x$, $x_0 = 0$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = \dfrac{1}{6x^6}$, $x_0 = 1$?

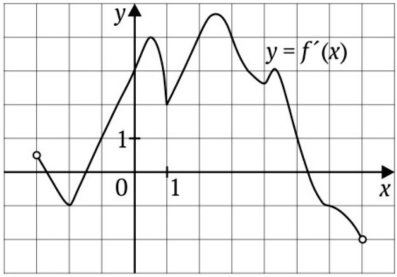
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



7. Найдите точки графика функции $y = g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $g(x) = \sqrt{4x+1}$, $k = \dfrac{2}{3}$.

8. Прямая $y = 4x - 7$ является касательной к графику функции $y = kx^2 - 6x - 2$. Найдите k.

9. Функция $y = f(x)$ определена на интервале (–3; 7). На рисунке изображен график производной этой функции. В ответ запишите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные наклонены под углом 150° к положительному направлению оси абсцисс.



Вариант 5

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = -x^3$, $x_0 = 1$?

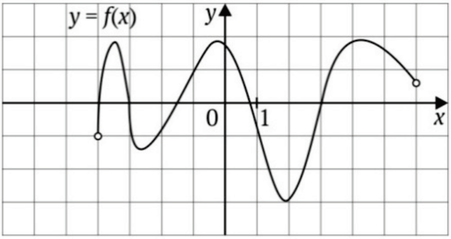
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = \sqrt{3}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2, \quad -3x + 2,$ в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = \ln(2 - x)$, $x_0 = 1$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = \frac{1}{7x^7}$, $x_0 = 1$?

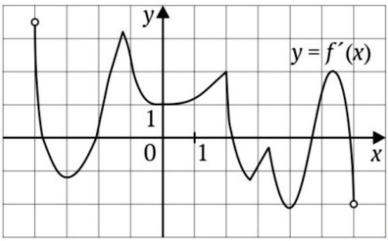
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$.



7. Найдите точки графика функции $y = g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент *k*: $g(x) = \sqrt{6x-1}$, $k = 3$.

8. Прямая $y = 3x + 2$ является касательной к графику функции $y = kx^2 + 7x + 4$. Найдите *k*.

9. Функция $y = f(x)$ определена на интервале (–4; 6). На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные наклонены под углом 50° к положительному направлению оси абсцисс.



Вариант 6

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = 2x^4$, $x_0 = 0$?

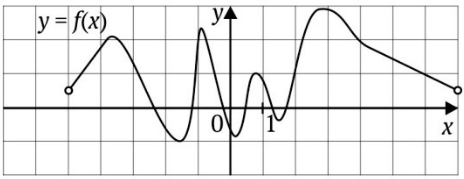
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = -0{,}5x^2$, $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y=\frac{x^3}{3}-5x^2+16x+7$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y=g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x)=\ln(2-x)$, $x_0=1$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y=g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x)=\cos^2 x$, $x_0=0$?

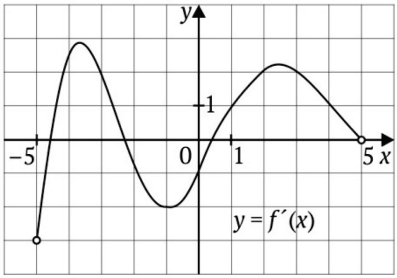
6. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на промежутке (–5; 7). Найдите количество решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[-2;\ 4]$.



7. Найдите точки графика функции $y=f(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $f(x)=\sqrt{5x-1}$, $k=\frac{5}{4}$.

8. Прямая $y=3x+3$ является касательной к графику функции $y=cx^2+5x$. Найдите c.

9. Функция $y=f(x)$ определена на интервале (–5; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. к графику функции $y=f(x)$ провели касательные в точках, абсциссы которых — целые числа. В ответе запишите количество точек графика функции $y=f(x)$, в которых проведенные касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.



Вариант 7

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = -2x^3$, $x_0 = -1$?

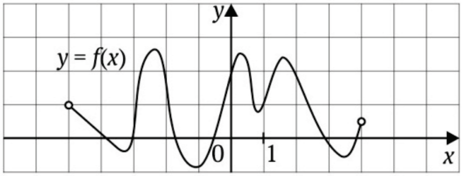
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = 0{,}25x^2$, $x_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \dfrac{x^3}{3} - 3{,}5x^2 + 6x + 1$, $\quad -3{,}5x^2 + 6x + 1$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \pi$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = \dfrac{1}{9x^9}$, $x_0 = 1$?

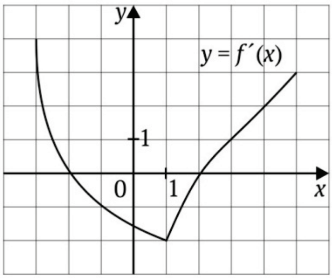
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$.



7. Найдите точки графика функции $y = g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $g(x) = \sqrt{-5x+1}$, $k = -\frac{5}{8}$.

8. Прямая $y = -5x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.

9. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = 3$. Определите градусную меру угла наклона касательной, если на рисунке изображен график производной этой функции.



Вариант 8

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = 4x^2$, $x_0 = -3$?

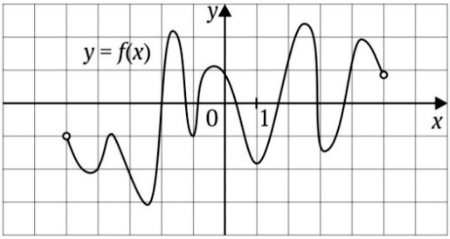
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = 5x^3 - 3x^2 + 8$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = \frac{1}{10x^{10}}$, $x_0 = 1$?

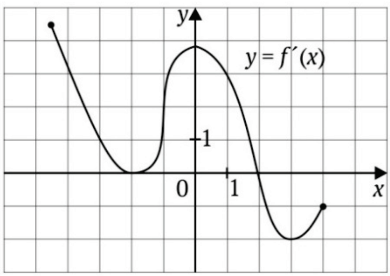
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$.



7. Найдите точки графика функции $y = g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $g(x) = \sqrt{1-3x}$, $k = -\frac{3}{4}$.

8. Прямая $y = 4x + 10$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x - 8$. Найдите a.

9. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$, если на рисунке изображен график производной этой функции.



Вариант 9

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = 3x^4$, $x_0 = 1$?

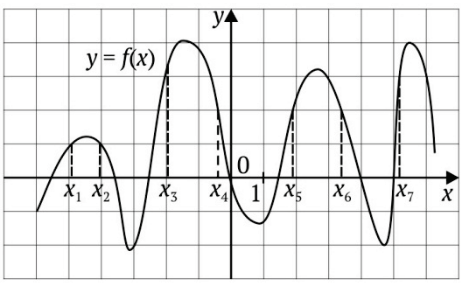
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = -0{,}25x^2$, $x_0 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x + 6, \quad + 15x + 6,$ в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = \cos x - 3$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = \dfrac{1}{4x^4}$, $x_0 = -1$?

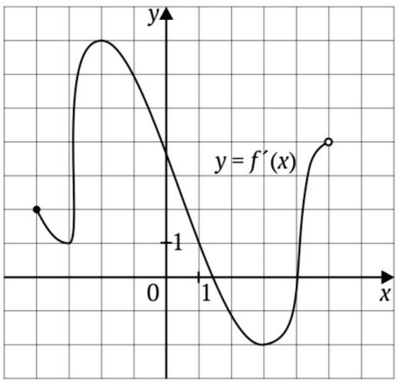
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f'(x) = 0$ положительна?



7. Найдите точки графика функции $y = g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $g(x) = \sqrt{7-2x}$, $k = -\frac{1}{3}$.

8. Прямая $y = 5 - x$ является касательной к графику функции $y = kx^2 + 5x$. Найдите k.

9. Функция $y = f(x)$ определена на интервале (−4; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. В ответе запишите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых угловые коэффициенты касательных к графику этой функции равны 3.



Вариант 10

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x) = 4x^3$, $x_0 = -1$?

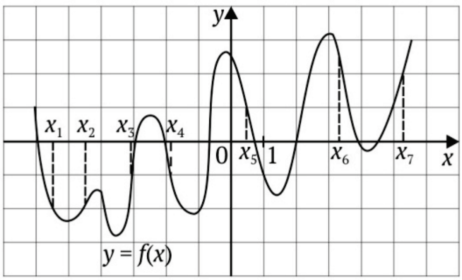
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = 1$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2-8x+10$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y=g(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $g(x)=\ln\left(x^2\right)$, $x_0=1$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y=g(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $g(x)=\dfrac{1}{2x^2}$, $x_0=-1$?

6. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $f'(x)=0$ отрицательна?

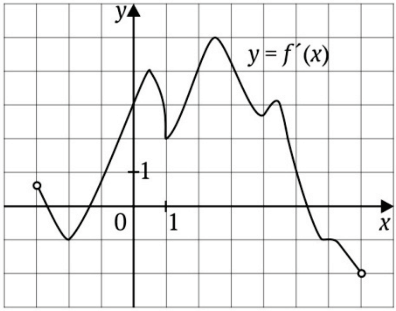


7. Найдите точки графика функции $y=g(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $g(x)=\sqrt{1-4x}$, $k=-\dfrac{2}{3}$.

8. Прямая $y=3x$ является касательной к графику функции $y=kx^2+x+9$. Найдите k.

9. Функция $y=f(x)$ определена на интервале (−3; 7). На рисунке изображен график производной этой функции.

Укажите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные наклонены под углом 135° к положительному направлению оси абсцисс.



Вариант 11

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = 2x^3$, $x_0 = -1$?

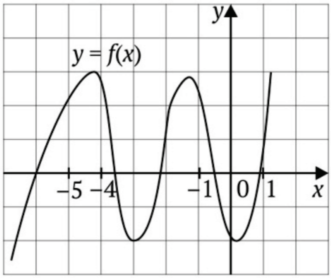
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = 0{,}5x^3$, $x_0 = 0$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = e^x - \cos x$, $x_0 = 0$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \frac{1}{3x^3}$, $x_0 = -1$?

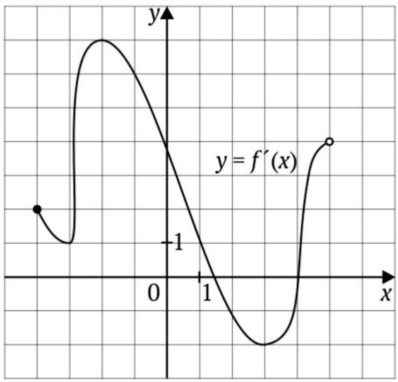
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -5, -4, -1, 1 на оси абсцисс. В каких из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



7. Найдите точки графика функции $y = h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x) = \sqrt{-6x-1}$, $k = -3$.

8. Прямая $y = -2x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 9x^2 + 25x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.

9. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-4; 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции. В ответ запишите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 150° к положительному направлению оси абсцисс.



Вариант 12

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = 3x^2$, $x_0 = 1{,}5$?

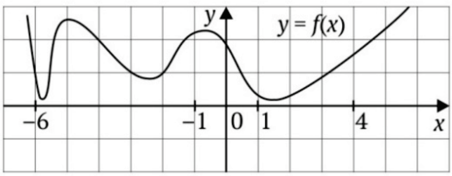
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = x^2$, $x_0 = -0{,}5$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 - 16x + 12$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = \sqrt{2x+1}$, $x_0 = 0$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \dfrac{1}{5x^5}$, $x_0 = -1$?

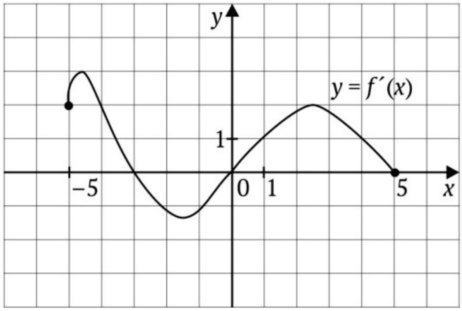
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −6, −1, 1, 4 на оси абсцисс. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



7. Найдите точки графика функции $y = h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x) = \sqrt{-5x-1}$, $k = -\dfrac{5}{4}$.

8. Прямая $y = -2x + 5$ является касательной к графику функции $y = kx^2 + 12x + 3$. Найдите k.

9. Функция $y = f(x)$ определена на интервале (−5; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 135° к положительному направлению оси абсцисс.



Вариант 13

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = x^3$, $x_0 = -1$?

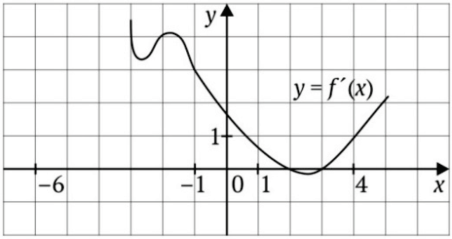
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = -x^2$, $x_0 = 0{,}5$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \frac{x^3}{3} - 2{,}5x^2 - 6$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = \cos x + 8x$, $x_0 = 0$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \frac{1}{6x^6}$, $x_0 = -1$?

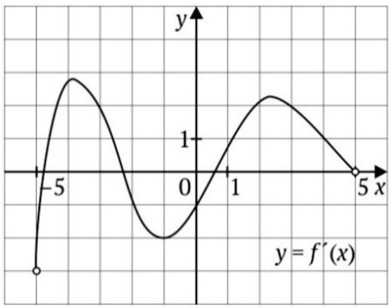
6. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельная прямой $y = 3x + 2$ или совпадает с ней.



7. Найдите точки графика функции $y = h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x) = \sqrt{3x+3}$, $k = \frac{3}{4}$.

8. Прямая $y = -2x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 6x^2 + 10x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.

9. Функция $y = f(x)$ определена на интервале (−5; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции $y = f(x)$ провели касательные в точках, абсциссы которых — целые числа. В ответе запишите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых проведенные касательные имеют положительный угловой коэффициент.



Вариант 14

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = 2x^2$, $x_0 = -0{,}25$?

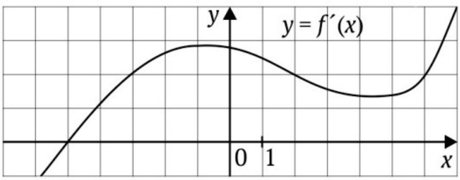
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -\sqrt{3}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 15x + 4$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \dfrac{1}{7x^7}$, $x_0 = -1$?

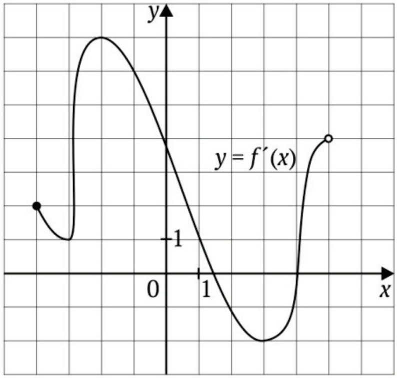
6. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой оси абсцисс или совпадает с ней.



7. Найдите точки графика функции $y = h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x) = \sqrt{4x - 7}$, $k = \dfrac{2}{7}$.

8. Прямая $y = -12x + 5$ является касательной к графику функции $y = kx^2 + 6x + 3$. Найдите k.

9. Чему равен угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$, если на рисунке изображен график производной этой функции?



Вариант 15

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = -4x^2$, $x_0 = 1$?

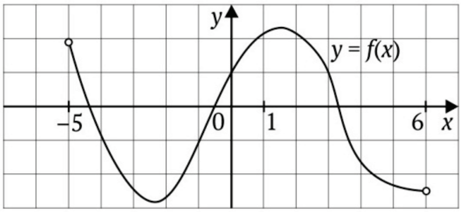
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = -0{,}5x^2$, $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \frac{x^3}{3} - 4{,}5x^2 + 14x + 8$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = x + \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 0$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \dfrac{1}{8x^8}$, $x_0 = -1$?

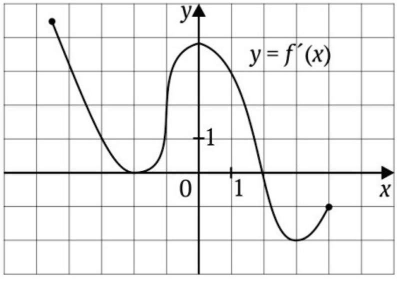
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (–5; 6). Укажите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



7. Найдите точки графика функции $y = h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x) = \sqrt{2x+1}$, $k = 1$.

8. Прямая $y = -7x$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 5x$. Найдите абсциссу точки касания.

9. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -4$, если на рисунке изображен график производной этой функции.



Вариант 16

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = -2x^3$, $x_0 = 2$?

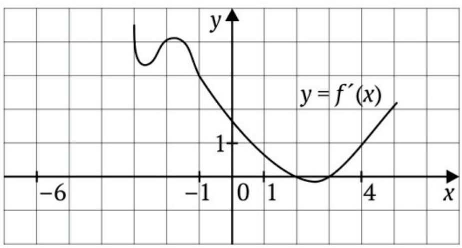
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = 8x^3$, $x_0 = 0$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = 2x^3 + 5 + x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = \sin x - \ln(x+1)$, $x_0 = 0$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \dfrac{1}{9x^9}$, $x_0 = -1$?

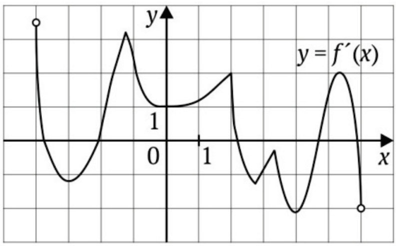
6. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. Найдите абсциссу точки, принадлежащей отрезку [1; 5], в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 5$ или совпадает с ней.



7. Найдите точки графика функции $y = h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x) = \sqrt{10x-9}$, $k = 5$.

8. Прямая $y = x + 2$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 + kx + 10$. Найдите k, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

9. Функция $y = f(x)$ определена на интервале (–4; 6). На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные наклонены под углом 135° к положительному направлению оси абсцисс.



Вариант 17

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = 2x^4$, $x_0 = -2$?

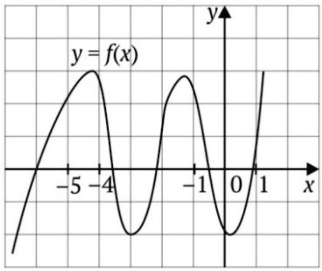
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = 0{,}5x^2 + 2$, $x_0 = 1$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = \sqrt{x} + 5$, $x_0 = 1$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \dfrac{1}{10x^{10}}$, $x_0 = -1$?

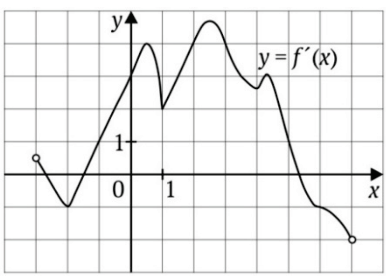
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −5, −4, −1, 1 на оси абсцисс. В каких из этих точек значение производной отрицательное? В ответе укажите количество этих точек.



7. Найдите точки графика функции $y = h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x) = \sqrt{-3x+3}$, $k = -\dfrac{3}{4}$.

8. Прямая $y = -2x + 7$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 9x^2 + 25x$. Найдите абсциссу точки касания.

9. Функция $y = f(x)$ определена на интервале (−3; 7). На рисунке — график производной этой функции. В ответе укажите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные наклонены под углом 120° к положительному направлению оси абсцисс.



Вариант 18

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = 2x^3$, $x_0 = 1$?

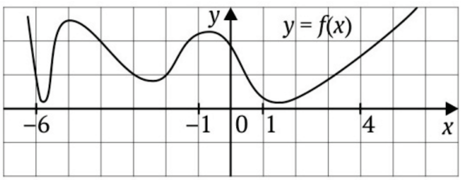
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = 6 - 0{,}5x^2$, $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x + 3$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = 3 - e^x$, $x_0 = \ln 3$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \dfrac{1}{3x^3}$, $x_0 = 1$?

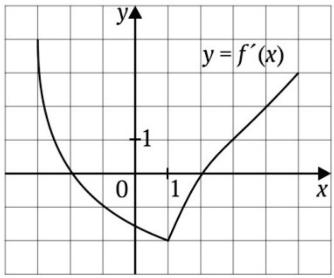
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −6, −1, 1, 4 на оси абсцисс. В каких из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



7. Найдите точки графика функции $y = h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x) = \sqrt{-4x - 7}$, $k = -\dfrac{2}{7}$.

8. Прямая $y=-4x-8$ является касательной к графику функции $y=x^3+3x^2-x-3$. Найдите абсциссу точки касания.

9. К графику функции $y=f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0=-1$. Определите градусную меру угла наклона касательной, если на рисунке изображен график производной этой функции.



Вариант 19

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y=h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x)=5x^2$, $x_0=-0{,}5$?

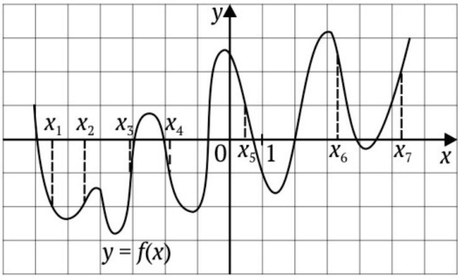
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y=h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x)=\dfrac{x^2}{2}$, $x_0=\sqrt{3}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y=h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x)=\dfrac{2}{3\sqrt{x^3}}$, $x_0=1$?

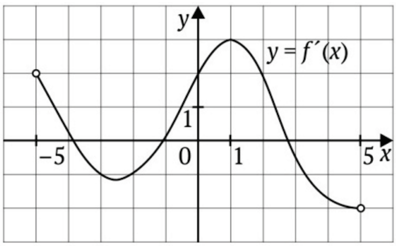
6. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $y=f(x)$ положительна?



7. Найдите точки графика функции $y=h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x)=\sqrt{1-2x}$, $k=-1$.

8. Прямая $y=3x+2$ является касательной к графику функции $y=-12x^2+kx-10$. Найдите k, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

9. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке (−5; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции $y=f(x)$ провели касательные в точках, абсциссы которых — целые числа. В ответе укажите количество точек графика функции $y=f(x)$, в которых проведенные касательные имеют положительный угловой коэффициент.



Вариант 20

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = -2x^3$, $x_0 = 3$?

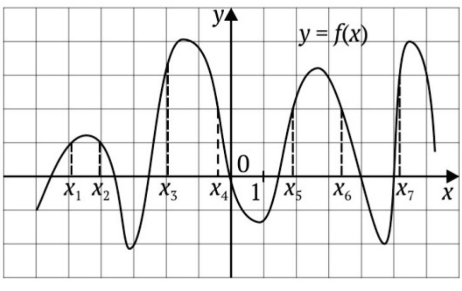
2. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = 2 + 0{,}5x^2$, $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$?

3. Определите абсциссы точек графика функции $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x - 2$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

4. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0, если $h(x) = \ln x$, $x_0 = 1$?

5. Чему равен угол между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси абсцисс, если $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$?

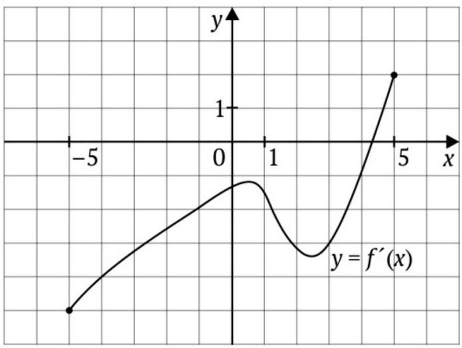
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $y = f(x)$ отрицательна?



7. Найдите точки графика функции $y = h(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k: $h(x) = \sqrt{-10x-9}$, $k = -5$.

8. Прямая $y = -2x - 4$ является касательной к графику функции $y = 16x^2 + kx + 12$. Найдите k, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

9. Функция $y = f(x)$ определена на интервале (−5; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. В ответе запишите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательные наклонены под углом 150° к положительному направлению оси абсцисс.



Ответы к практикуму по теме «Производная»

Варианты 1–7

Номер задания	Вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
1	6	6	9	12	−3	0	−6
2	45°	45°	135°	0°	60°	150°	30°
3	0; 2	−2; 0	$-\frac{1}{3}$; 0	2; 4	−1; 3	2; 8	1; 6
4	2	2	5	3	−1	0	0
5	135°	135°	135°	135°	135°	135°	135°
6	0,125	−0,25	0,75	−0,2	5	6	7
7	(3; 4)	(1; 2)	(1; 3)	(2; 3)	$\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$	(1; 2)	(−3; 4)
8	−21	30	2	5	−2	−1	1
9	3	2	4	3	7	3	45°

Варианты 8–14

Номер задания	Вариант						
	8	9	10	11	12	13	14
1	−24	12	12	6	9	3	−1
2	150°	30°	45°	0°	135°	135°	120°
3	0; 0,4	3; 5	−4; 2	−3; 1	−2; 8	−1; 6	−3; 5
4	−3	−0,5	2	1	1	8	−1
5	135°	45°	45°	135°	135°	45°	135°
6	10	4	4	1	−6	−1	−5
7	(−1; 2)	(−1; 3)	(−2; 3)	$\left(-\frac{1}{3};\ 1\right)$	(−1; 2)	$\left(\frac{1}{3};\ 2\right)$	(14; 7)
8	1	−3	1	3	−7	2	−3
9	1	3	2	2	2	4	7

Варианты 15–20

Номер задания	Вариант					
	15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	−8	−24	−64	6	−5	−54
2	30°	0°	45°	150°	60°	150°
3	2; 7	$-\frac{1}{3}$; 0	−2; 1	−4; −2	−3; 1	−1; 2
4	0	0	0,5	−3	$\frac{1}{2}$	1
5	45°	135°	45°	135°	135°	135°
6	4	4	2	−1	3	3
7	(0; 1)	(1; 1)	$\left(-\frac{1}{3};\ 2\right)$	(−14; 7)	(0; 1)	(−1; 1)
8	−2	9	−3	−1	27	−34
9	3	7	1	135°	3	1

3.7

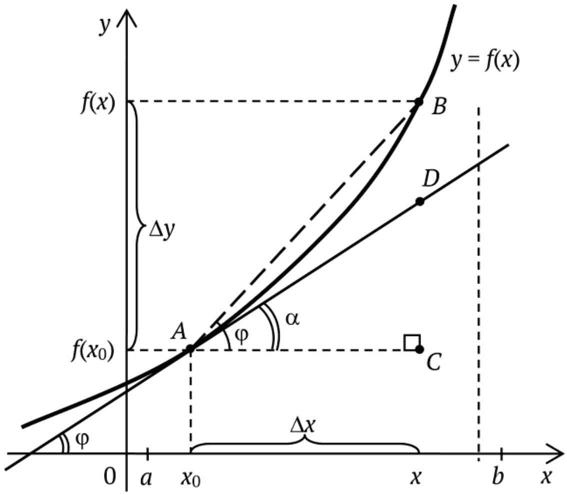
Практикум по теме «Геометрический смысл производной»

Производной функции в точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Функцию, имеющую производную (в некоторой точке), называют *дифференцируемой* (в этой точке). Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*. Производная функции также является функцией.

Геометрический смысл производной заключается в следующем: значение производной в точке $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, а угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла наклона касательной (или тангенсу угла, образованного касательной и положительным направлением оси Ох).



Например, на рисунке $f'(x_0)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha=k_{кас.}$. Отрезок касательной, Δy и Δx образуют прямоугольный треугольник. Если в этом треугольнике найти отношение Δy к Δx, то получим абсолютное значение производной. Для определения знака производной рассмотрим угол между касательной к графику функции и осью абсцисс (это угол, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси Ох до касательной). Если угол острый, то значение производной в точке x_0 положительно, а если угол тупой, то значение производной в точке x_0 отрицательно.

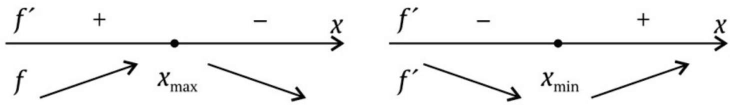
Угловые коэффициенты параллельных прямых равны. Прямая, параллельная оси Ох, имеет угловой коэффициент, равный нулю.

Выводы о свойствах производной функции, которые можно извлечь из графика данной функции, т.е. что можно сказать о производной функции $y = f'(x)$, если дан график функции $y = f(x)$:

- в каждой точке промежутка возрастания функции производная положительна;
- в каждой точке промежутка убывания функции производная отрицательна;
- в точках экстремума функции производная равна нулю.

Выводы о свойствах функции, которые можно извлечь из данного графика производной этой функции, т.е. что можно сказать о функции $y = f(x)$, если дан график производной функции $y = f'(x)$:

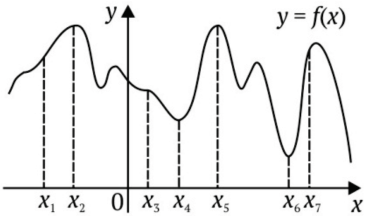
- промежутки, на которых график производной лежит выше оси абсцисс, являются промежутками возрастания функции (поскольку в каждой точке такого промежутка производная положительна, то и угловой коэффициент касательной к графику функции, проведенной в любой точке этого промежутка, будет положительным, что и означает возрастание функции на этом промежутке);
- промежутки, на которых график производной лежит ниже оси абсцисс, являются промежутками убывания функции;
- точки оси абсцисс, в которых график производной пересекает эту ось «сверху вниз» (производная в них равна нулю и меняет знак с плюса на минус, т.е. возрастание функции сменяется убыванием), являются точками максимума функции;
- точки оси абсцисс, в которых график производной пересекает эту ось «снизу вверх» (производная в них равна нулю и меняет знак с минуса на плюс, т.е. убывание функции сменяется возрастанием), являются точками минимума функции.



Вариант 0

Пример 1

На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и на оси абсцисс отмечены 7 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $y = f(x)$ отрицательна?



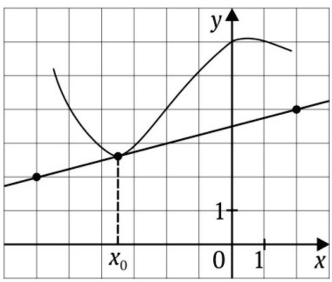
Решение

Точки x_4, x_5, x_6 являются точками экстремума функции, поэтому в этих точках производная равна нулю. Точки x_1, x_2, x_7 принадлежат интервалам возрастания функции, точка x_3 принадлежит интервалу убывания функции. Отрицательные значения производная принимает в точках убывания функции, т.е. только в точке x_3.

Ответ: 1.

Пример 2

На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Чему равно значение производной функции $f(x)$ в точке x_0?



Решение

Согласно геометрическому смыслу производной искомое значение $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, а угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла, который образует касательная с положительным направлением оси Ох, т.е. $f'(x_0) = k_{кас.} = \operatorname{tg}\alpha$.

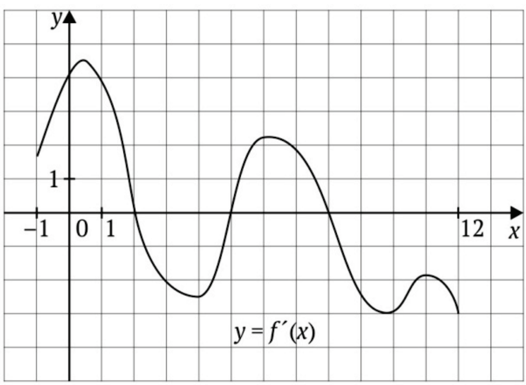
В данном случае угол между касательной и положительным направлением оси Ох острый, поэтому значение производной будет положительным.

Рассмотрим, например, прямоугольный треугольник с вершинами в точках $(-6;\ 2)$, $(2;\ 4)$, $(2;\ 2)$. В этом треугольнике находим острый угол между гипотенузой (т.е. касательной) и катетом, параллельным оси Ох. Находим тангенс этого угла: поскольку противолежащий катет равен 2, а прилежащий катет равен 8, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{8}$, т.е. 0,25. Значит, и $f'(x_0) = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Пример 3

На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-1;\ 12)$. Определите точку минимума функции $f(x)$.



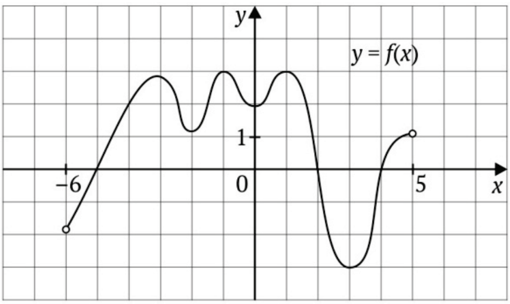
Решение

В точках максимума и минимума производная равна нулю, т.е. это точки пересечения графика производной функции с осью Ох, в данном примере их три: $x = 2$, $x = 5$, $x = 8$. Но в точке минимума убывание функции сменяется возрастанием, производная меняет знак с минуса на плюс, т.е. слева вблизи от этой точки график производной лежит ниже оси абсцисс (производная отрицательна, функция убывает), а справа вблизи от этой точки график производной лежит выше оси абсцисс (производная положительна, функция возрастает). Такой точкой является $x = 5$.

Ответ: 5.

П р и м е р 4

На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-6; 5)$. В ответе укажите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю.



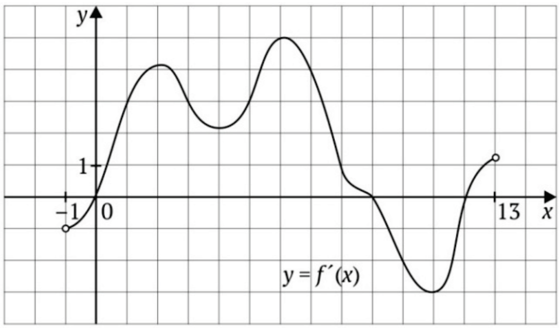
Решение

Если производная равна нулю, то и угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в данной точке, равен нулю, т.е. такая касательная параллельна оси абсцисс. Для данной функции подобным свойством обладают все точки максимума и минимума, т.е. все точки экстремума («вершины» и «впадины»). В данном примере таких точек 6.

Ответ: 6.

Пример 5

На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-1;\ 13)$. В какой точке промежутка $[2;\ 6]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



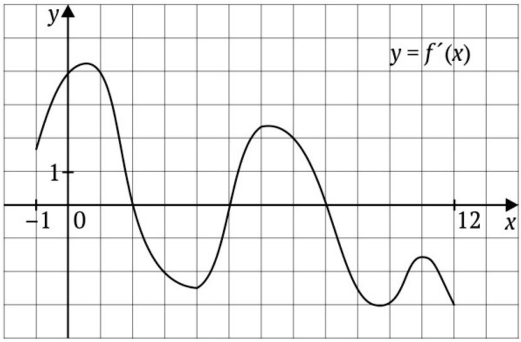
Решение

На промежутке $[2;\ 6]$ график производной лежит выше оси абсцисс, т.е. на этом промежутке производная положительна, а следовательно, функция возрастает на данном промежутке. Поэтому наименьшее значение функция принимает в левом конце отрезка, т.е. в точке $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 6

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-1;\ 12)$. В ответе укажите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 2$ или совпадает с ней.



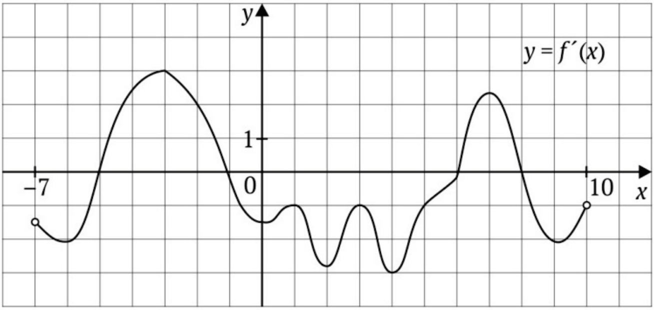
Решение

Геометрический смысл производной состоит в следующем: значение производной в данной точке равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в данной точке. Поскольку по условию касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 2$ или совпадает с ней, то угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту прямой, т.е. в данном примере равен –1. Для выполнения задания надо найти все точки, в каждой из которых производная равна –1. Для этого достаточно найти число точек пересечения графика производной с прямой $y = -1$. Таких точек 3.

Ответ: 3.

Пример 7

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-7;\ 10)$. Укажите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6;\ 9]$.



Решение

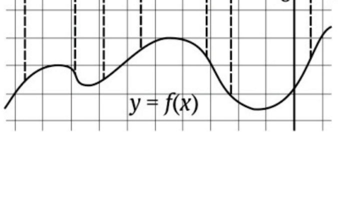
В точках максимума и минимума производная равна нулю, т.е. это точки пересечения графика производной функции с осью Ох, в данном примере их четыре: $x=-5,\ x=-1,\ x=6,\ x=8$. Однако в точках максимума возрастание функции сменяется убыванием, производная меняет знак с плюса на минус, график производной пересекает ось абсцисс «сверху вниз», т.е. слева вблизи от этой точки график производной лежит выше оси абсцисс (производная положительна, функция возрастает), а справа вблизи от этой точки график производной лежит ниже оси абсцисс (производная отрицательна, функция убывает). Такими точками являются $x=-1$ и $x=8$, т.е. две точки.

Ответ: 2.

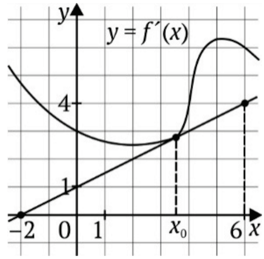
Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

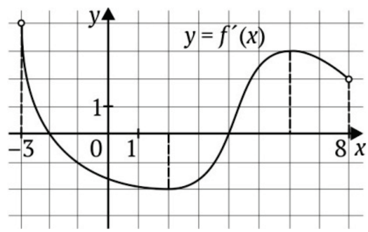


2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Чему равно значение производной функции $f(x)$ в точке x_0?



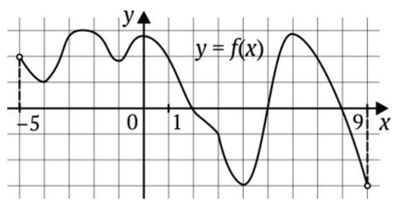
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке (3; 8). Определите точку минимума функции $f(x)$.



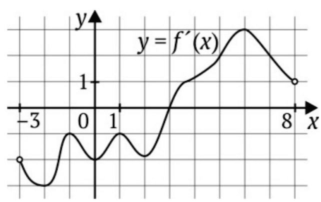
---

4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-5; 9)$. В ответе укажите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

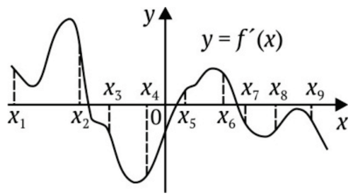


---

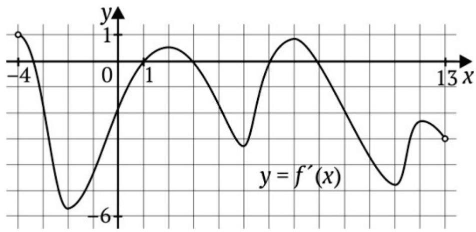
5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 8)$. В какой точке промежутка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



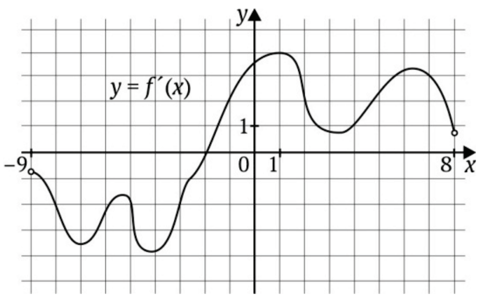
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и на оси абсцисс отмечены точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 13)$. В ответе укажите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$.

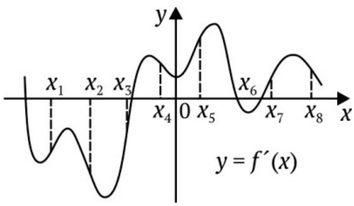


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-9; 8)$. Укажите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 5]$.

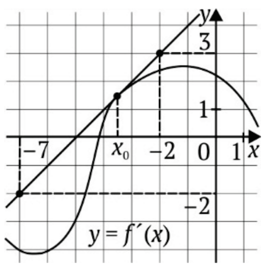


Вариант 2

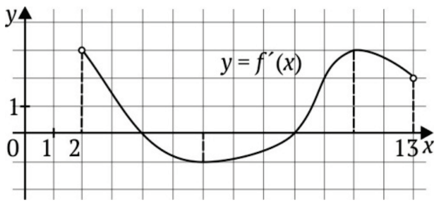
1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



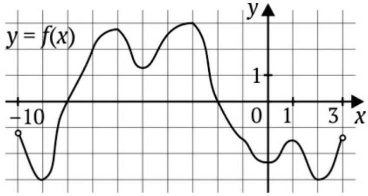
2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Чему равно значение производной функции $f(x)$ в точке x_0?



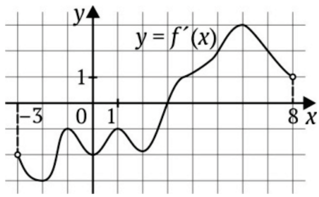
3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке (2; 13). Определите точку максимума функции $f(x)$.



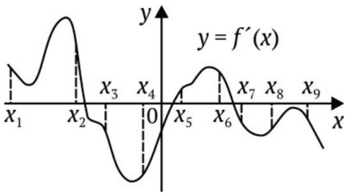
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-10; 3)$. Укажите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



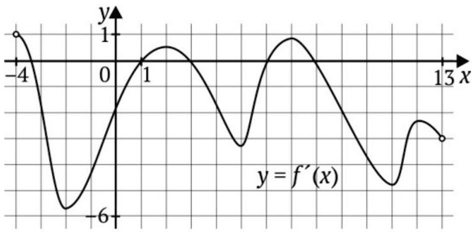
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 8)$. В какой точке промежутка $[3; 7]$ у функции $f(x)$ наибольшее значение?



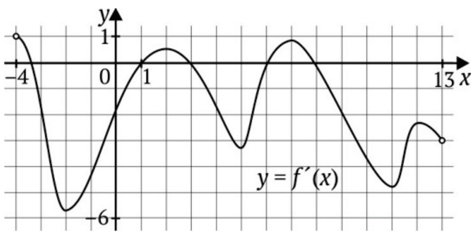
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и на оси абсцисс отмечены точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 2$.

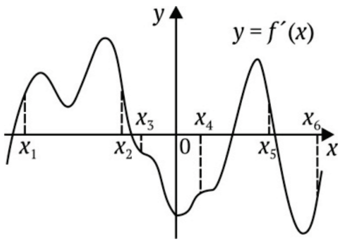


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 13)$. Укажите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 12]$.

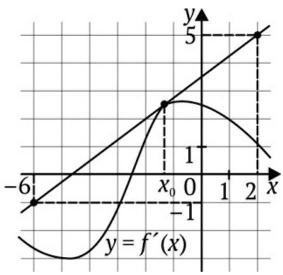


Вариант 3

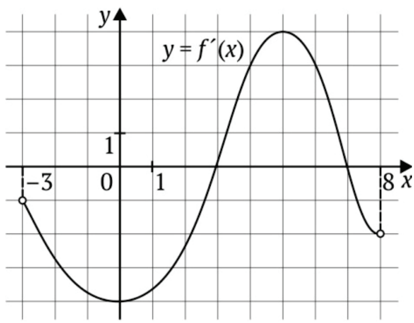
1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



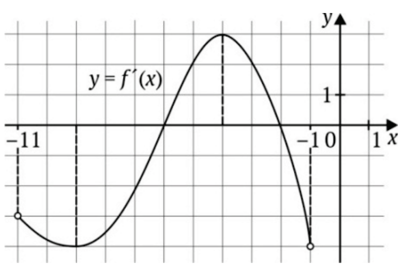
2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Чему равно значение производной функции $f(x)$ в точке x_0?



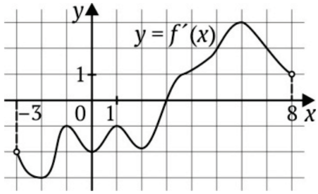
3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3;\ 8)$. Определите точку максимума функции $f(x)$.



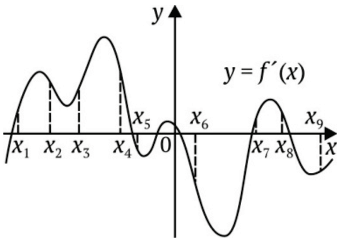
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-11; -1)$. Определите точку из отрезка $[-7;\ -2]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



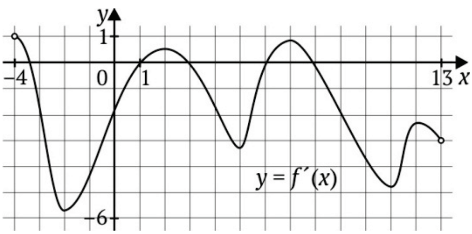
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. В какой точке промежутка $[2; 5]$ у функции $f(x)$ наименьшее значение?



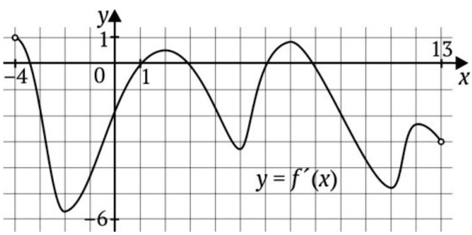
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 13)$. Укажите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -4x - 12$.

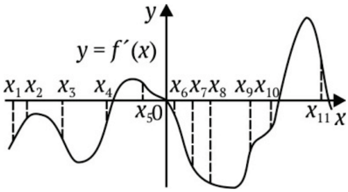


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4;\ 13)$. Укажите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[2; 12]$.

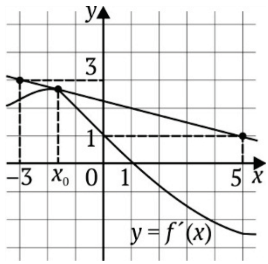


Вариант 4

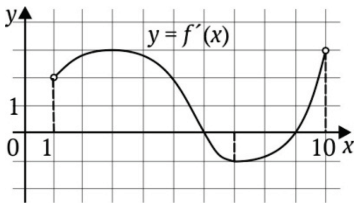
1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



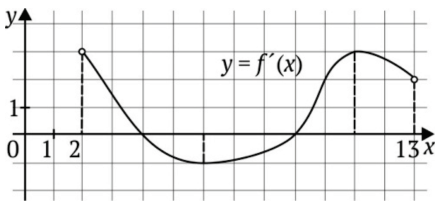
2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Чему равно значение производной функции $f(x)$ в точке x_0?



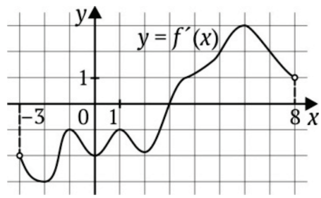
3. На рисунке представлен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке (1; 10). Определите точку минимума функции $f(x)$.



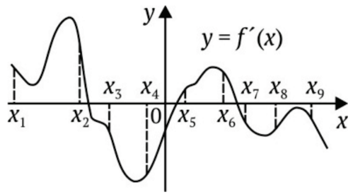
4. На рисунке представлен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (2; 13). Укажите точку из промежутка [7; 12], в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



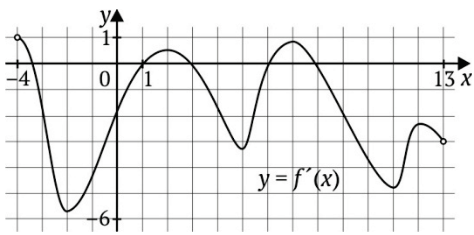
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



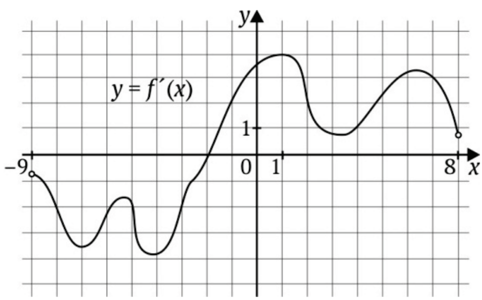
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$.

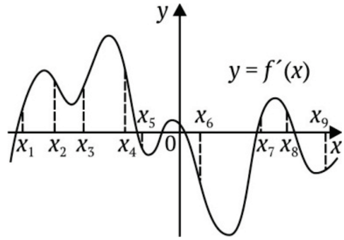


8. На рисунке — график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-9; 8)$. Сколько точек минимума функции $f(x)$ принадлежит промежутку $[-8; 5]$?

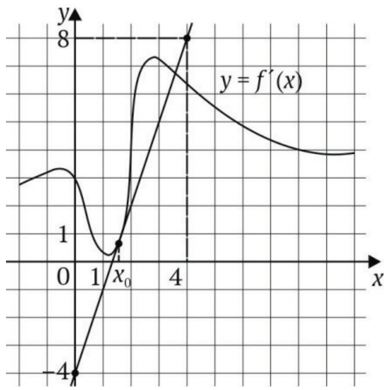


Вариант 5

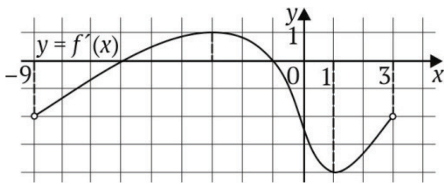
1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



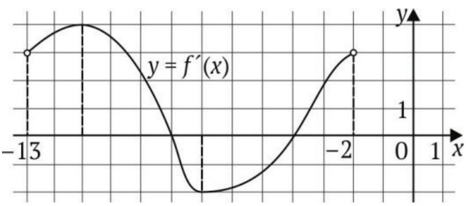
2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Чему равно значение производной функции $f(x)$ в точке x_0?



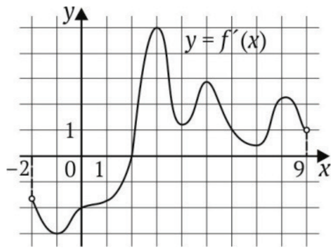
3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-9; 3)$. Определите точку минимума функции $f(x)$.



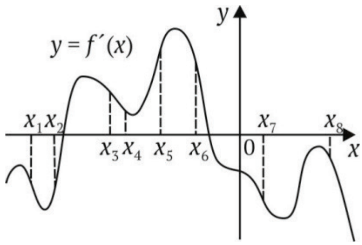
4. На рисунке — график функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $(-13; -2)$. В какой точке из промежутка $[-10; -3]$ производная функции $f(x)$ равна 0?



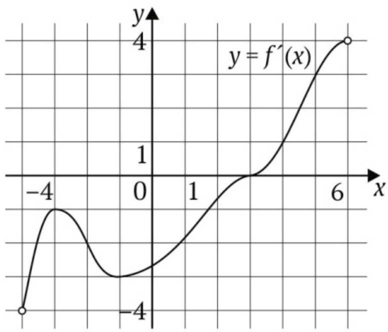
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



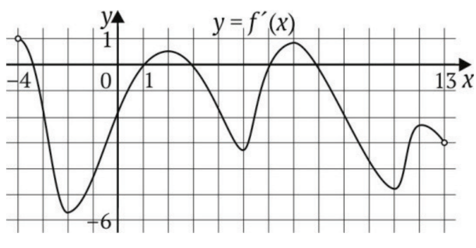
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены точки на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 6)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$.

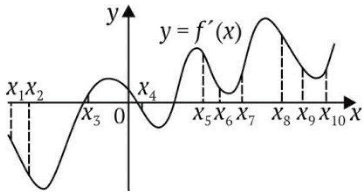


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 13)$. Укажите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[0; 4]$.



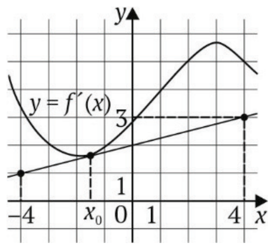
Вариант 6

1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



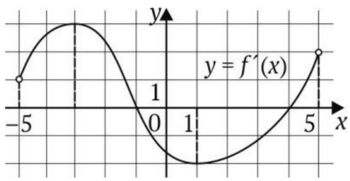
---

2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Чему равно значение производной функции $f(x)$ в точке x_0?



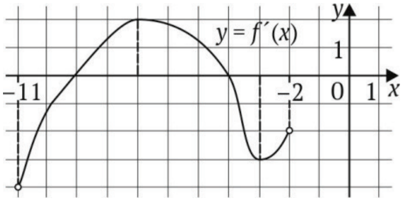
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-5; 5)$. Определите точку максимума функции $f(x)$.

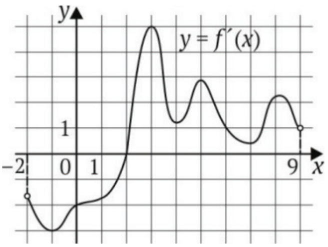


---

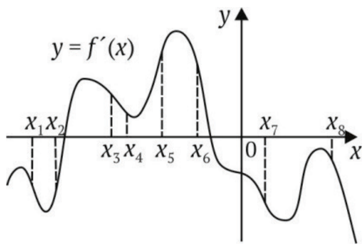
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-11; -2)$. Укажите точку из отрезка $[-10; -4]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



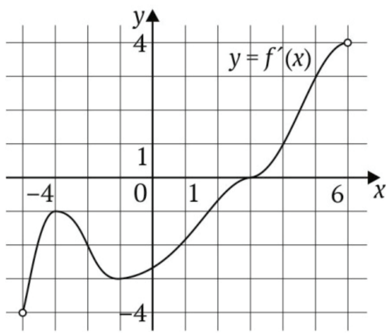
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[3; 5]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



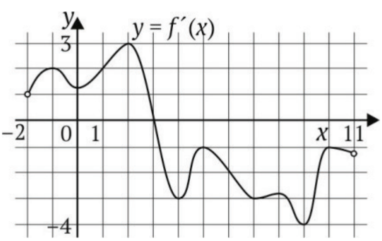
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 6)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 4$.

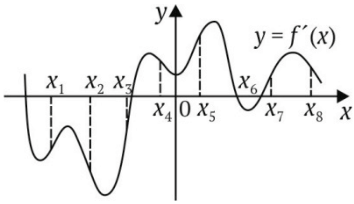


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-2; 11)$. Укажите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[0; 9]$.



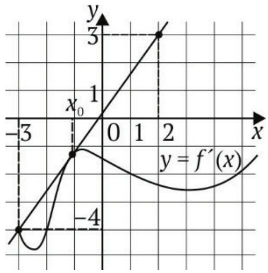
Вариант 7

1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



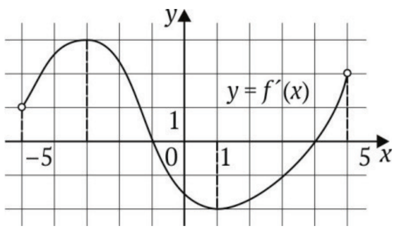
---

2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



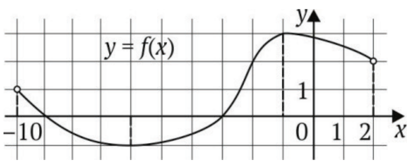
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;\ 5)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

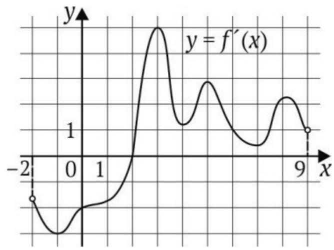


---

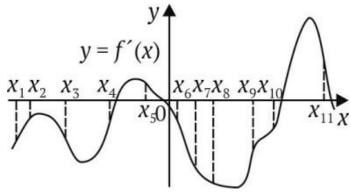
4. На рисунке представлен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-10; 2)$. Укажите точку из отрезка $[-9;\ -2]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



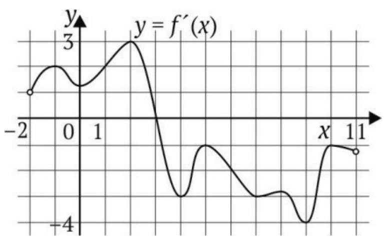
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[-1; 2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



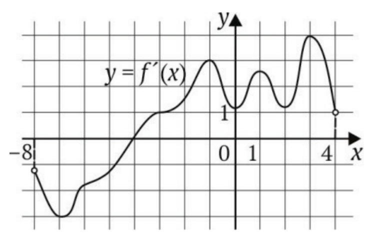
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены одиннадцать точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

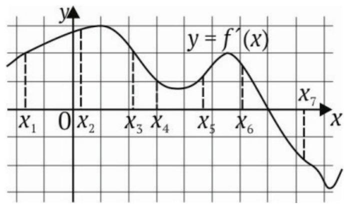


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 2]$.

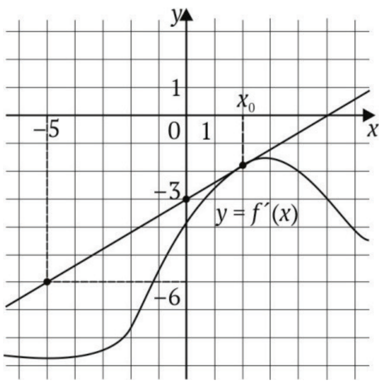


Вариант 8

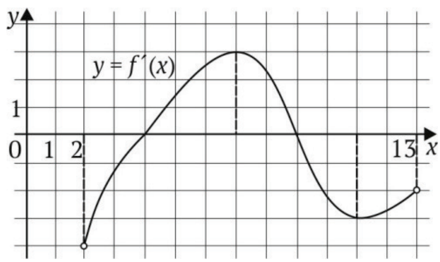
1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



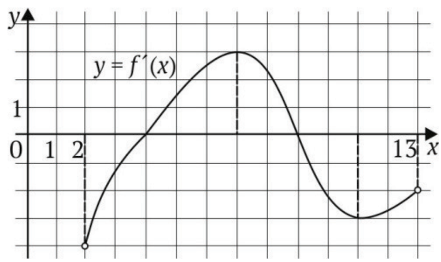
2. На рисунке приведены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



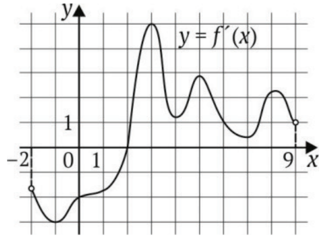
3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (2; 13). Найдите точку максимума функции $f(x)$.



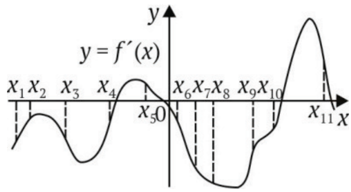
4. На рисунке приведен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (2; 13). Найдите точку из отрезка [8; 12], в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



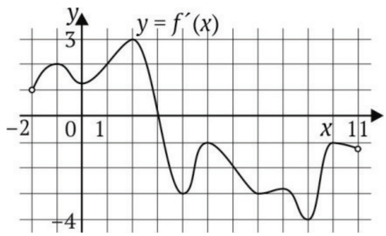
5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



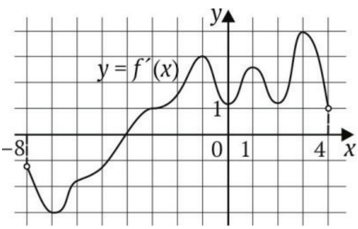
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены одиннадцать точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 15$ или совпадает с ней.

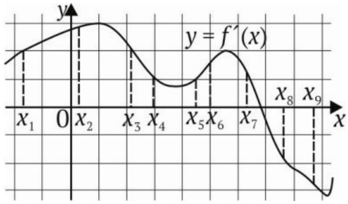


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-1; 3]$.



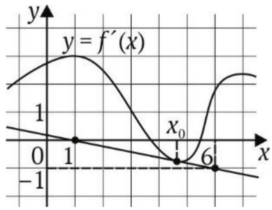
Вариант 9

1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



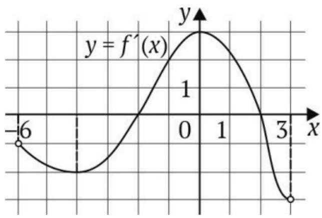
---

2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



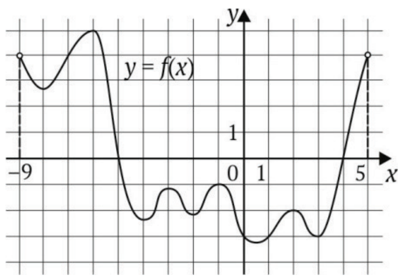
---

3. На рисунке представлен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 3)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

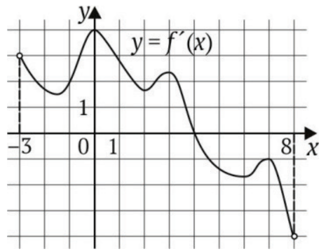


---

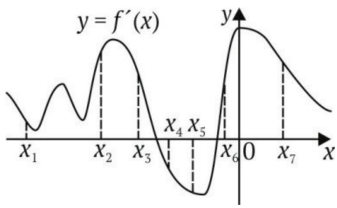
4. На рисунке представлен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



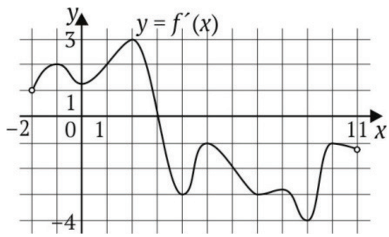
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[0; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



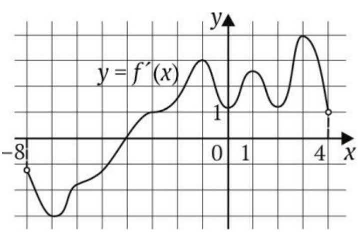
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 11)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 6$ или совпадает с ней.

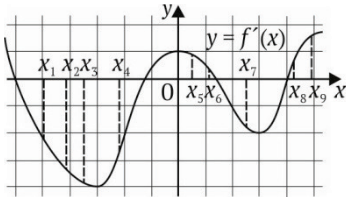


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 3]$.

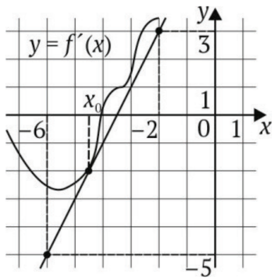


Вариант 10

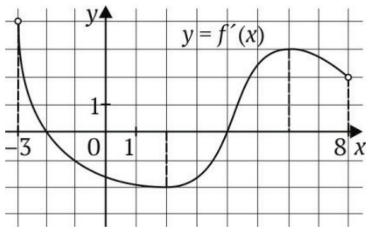
1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



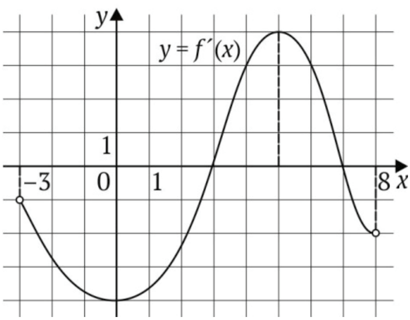
2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



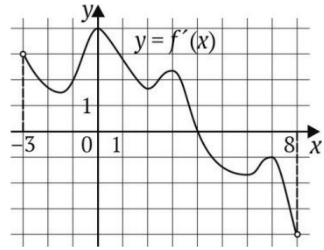
3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3;\ 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



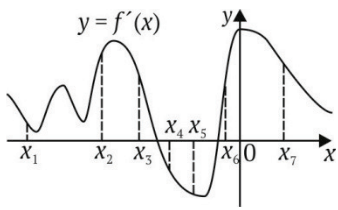
4. На рисунке представлен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку из отрезка $[2;\ 7]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



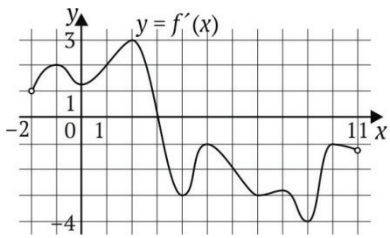
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[4; 6]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



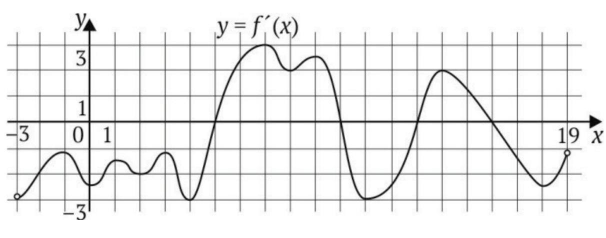
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 2$ или совпадает с ней.

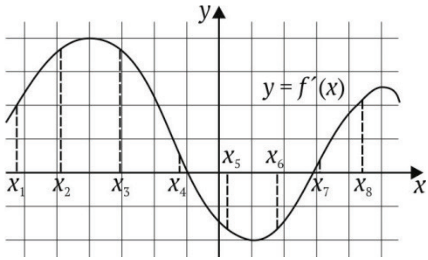


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 12]$.



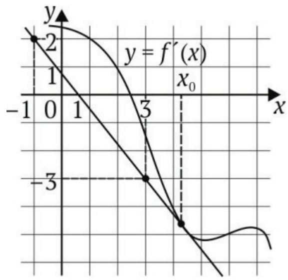
Вариант 11

1. На рисунке представлен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



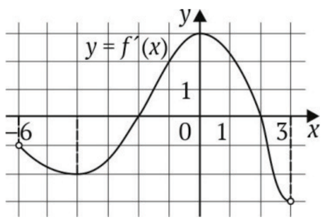
---

2. На рисунке представлены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



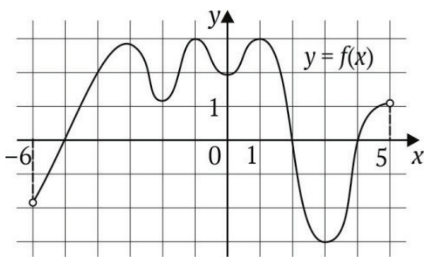
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 3)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

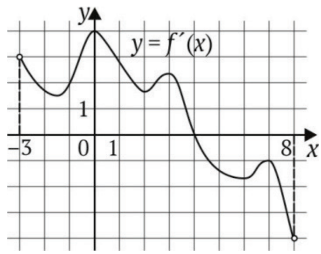


---

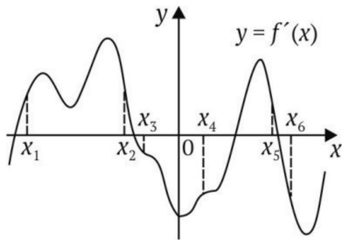
4. На рисунке представлен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



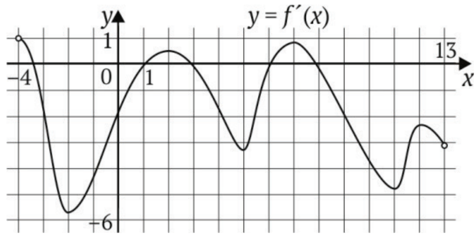
5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



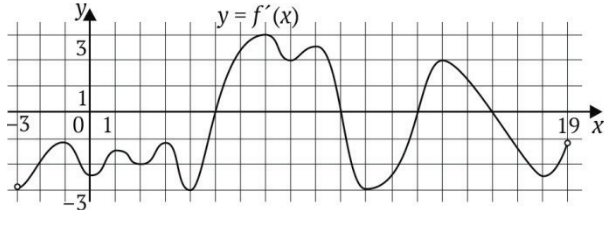
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 14$.

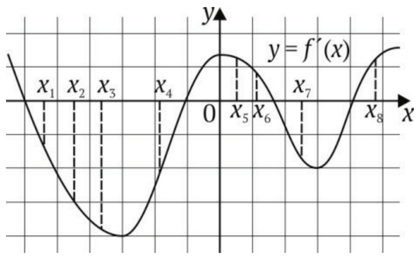


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[2; 15]$.



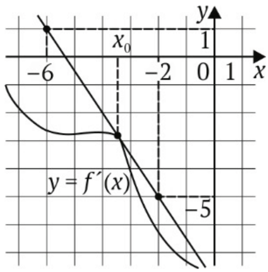
Вариант 12

1. На рисунке представлен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



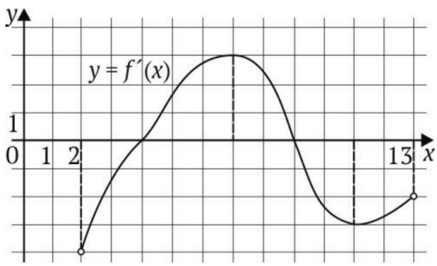
---

2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



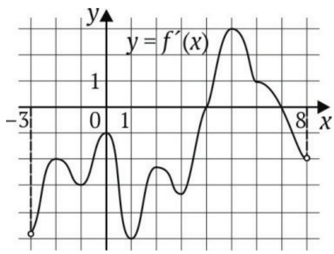
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(2; 13)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

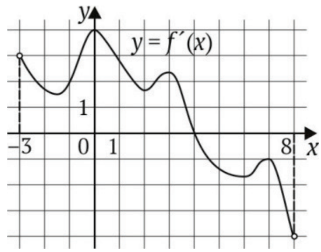


---

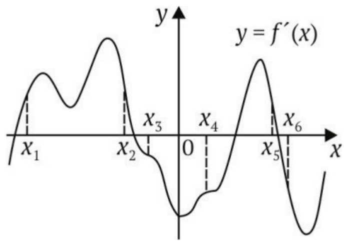
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



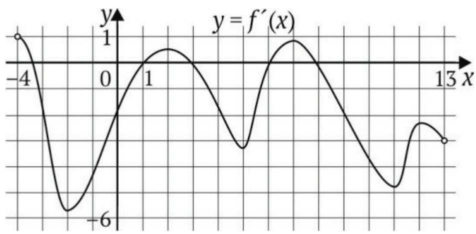
5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



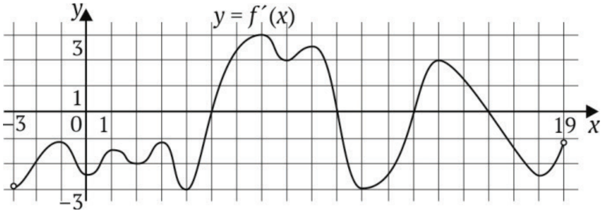
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 13)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -5x - 8$.

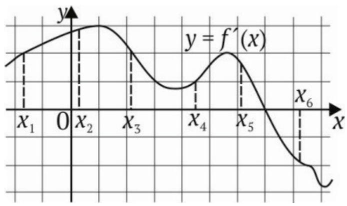


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[0; 9]$.



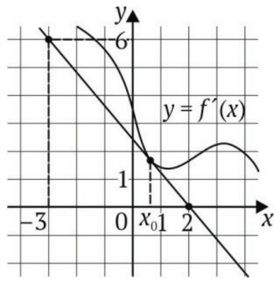
Вариант 13

1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены точки на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



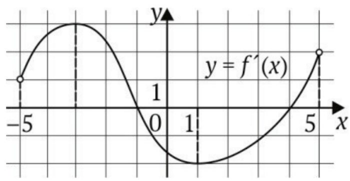
---

2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Определите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



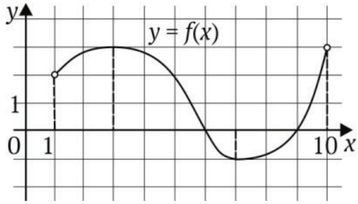
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-5; 5)$. Определите точку минимума функции $f(x)$.

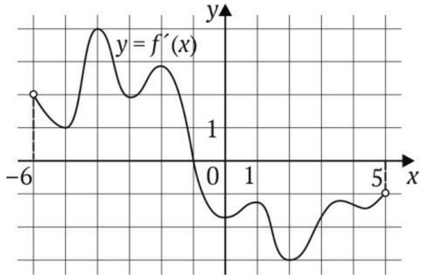


---

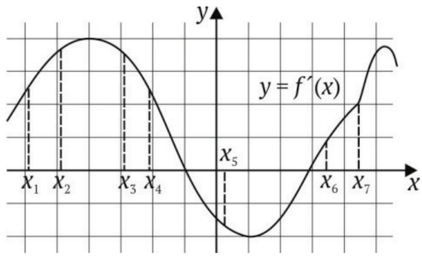
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(1; 10)$. Укажите точку из отрезка $[2; 6]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



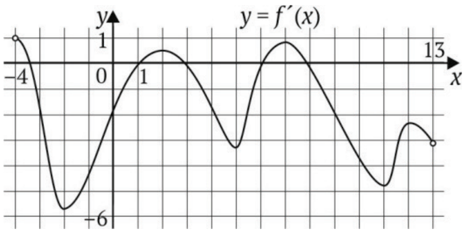
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



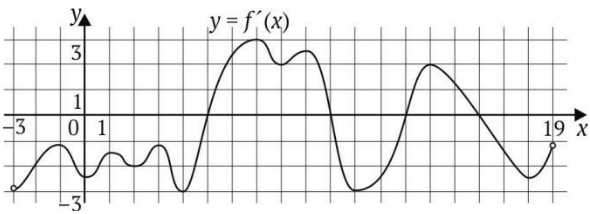
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены точки на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?



7. На рисунке приведен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -4x$ или совпадает с ней.

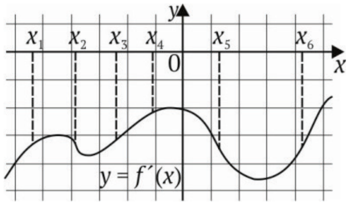


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 19)$. Укажите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[1; 17]$.



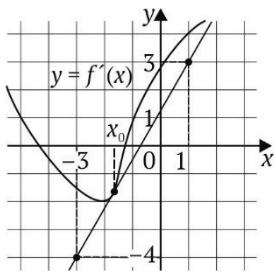
Вариант 14

1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены точки на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



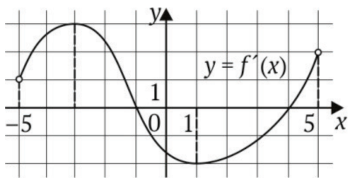
---

2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Определите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



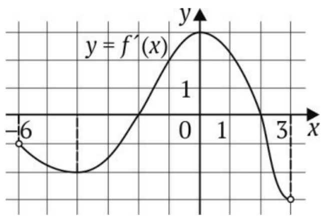
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-5; 5)$. Определите точку максимума функции $f(x)$.

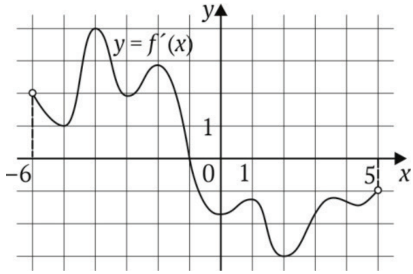


---

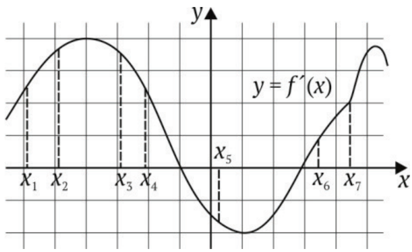
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-6; 3)$. Укажите точку из отрезка $[-5; -1]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



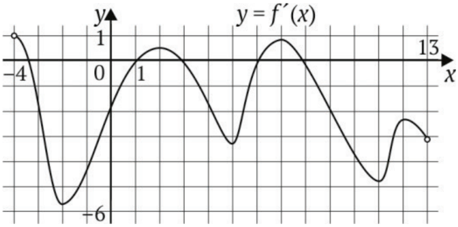
5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



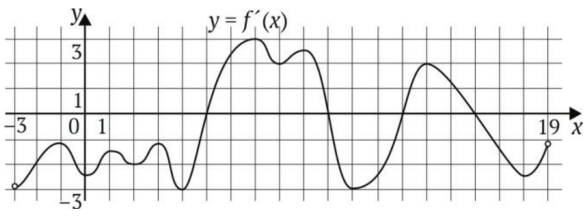
6. На рисунке приведен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке показан график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -4x + 7$ или совпадает с ней.

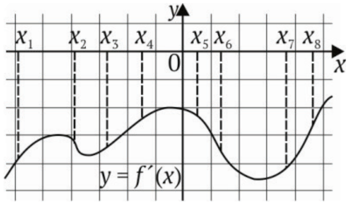


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 19)$. Укажите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[1; 17]$.



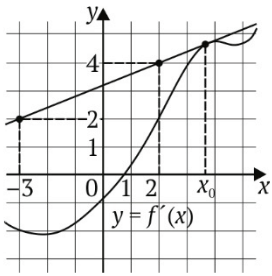
Вариант 15

1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены точки на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



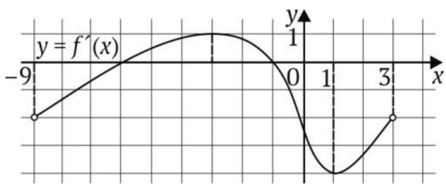
---

2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



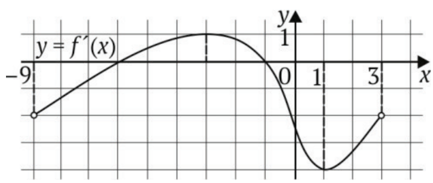
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-9; 3)$. Определите точку максимума функции $f(x)$.

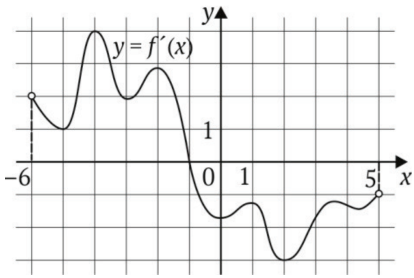


---

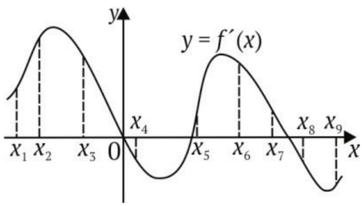
4. На рисунке представлен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-9; 3)$. Укажите точку из отрезка $[-8; 0]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



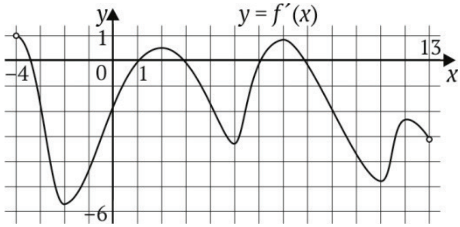
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



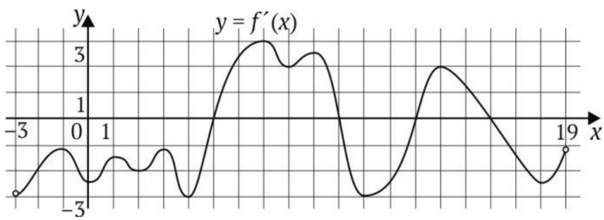
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены точки на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



7. На рисунке показан график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 2$ или совпадает с ней.

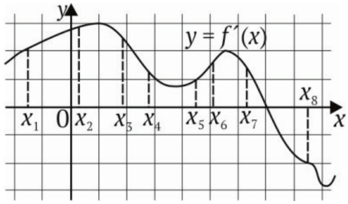


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3;\ 19)$. Укажите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[1;\ 14]$.

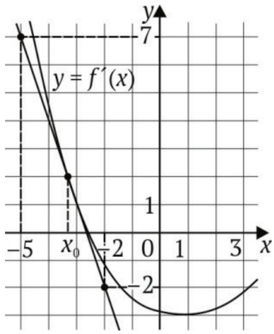


Вариант 16

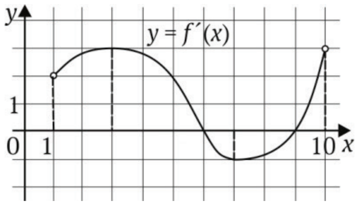
1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



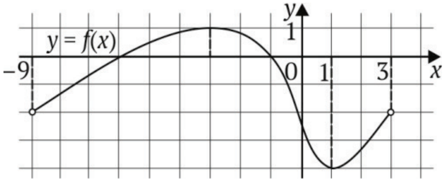
2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Определите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



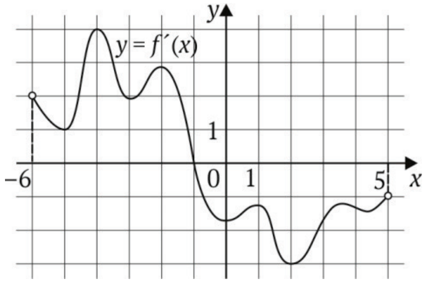
3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке (1; 10). Определите точку максимума функции $f(x)$.



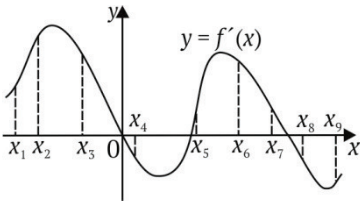
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке (−9; 3). Укажите точку из отрезка [−2; 2], в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



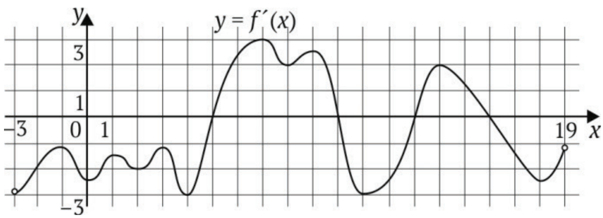
5. На рисунке представлен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



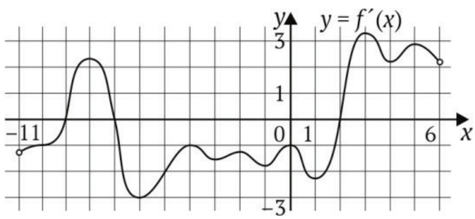
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 19)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 2$ или совпадает с ней.

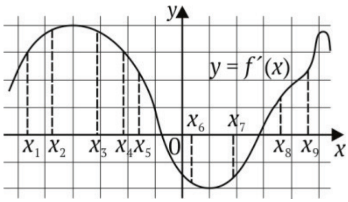


8. На рисунке показан график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $(-11; 6)$. Сколько точек максимума функции $f(x)$ принадлежит промежутку $[-9; 0]$?



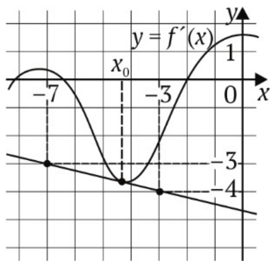
Вариант 17

1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



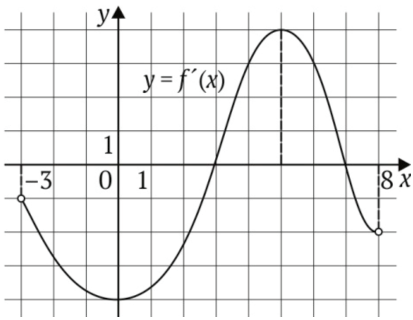
---

2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



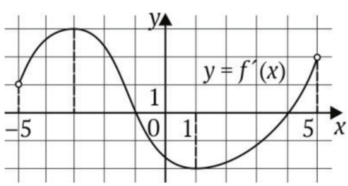
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 8)$. Определите точку минимума функции $f(x)$.

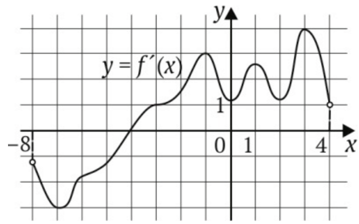


---

4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-5; 5)$. Укажите точку из отрезка $[-2; 4]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.

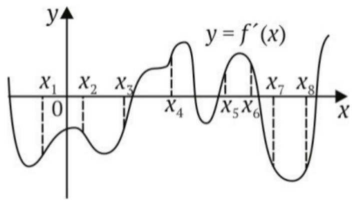


5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



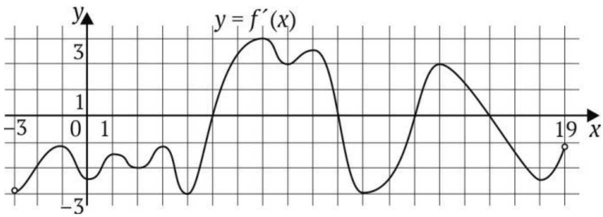
---

6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены точки на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



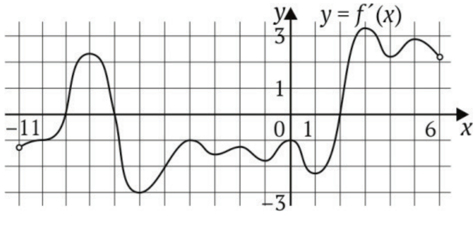
---

7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 19)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x - 24$ или совпадает с ней.



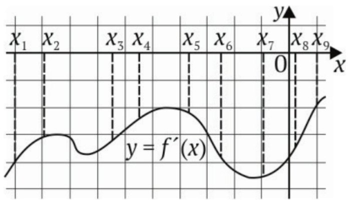
---

8. На рисунке показан график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $(-11; 6)$. Укажите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих интервалу $[-10; 4]$.



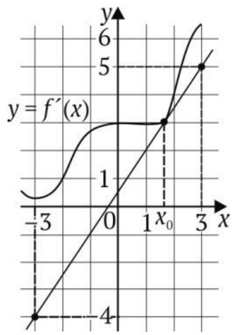
Вариант 18

1. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



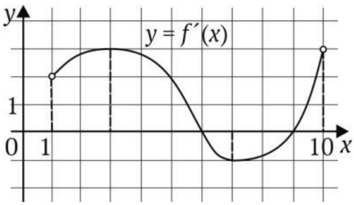
---

2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Определите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



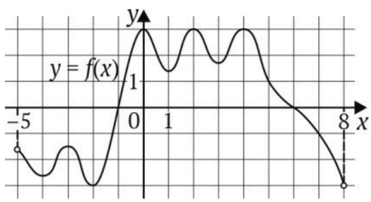
---

3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке (1; 10). Определите точку минимума функции $f(x)$.

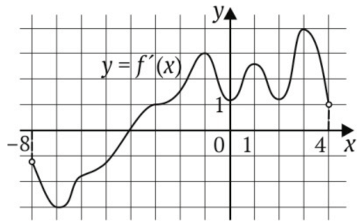


---

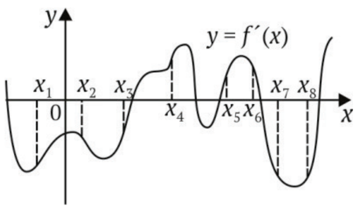
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке (−5; 8). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



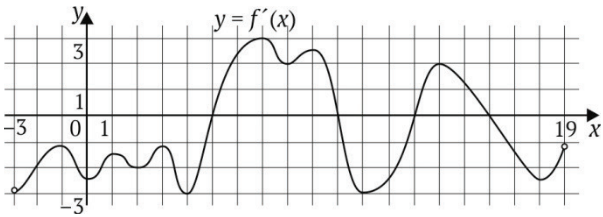
5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-8; 4)$. В какой точке интервала $[-7; -4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



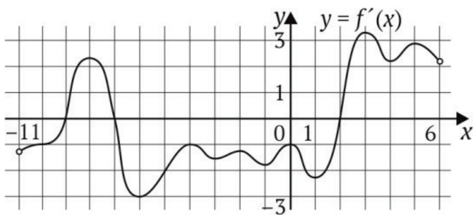
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены точки на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 19)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2$.

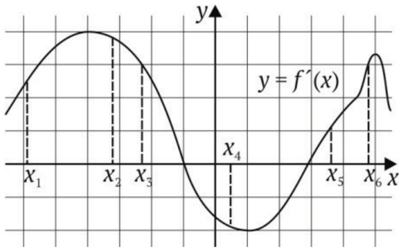


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-11; 6)$. Укажите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих промежутку $[-10; 5]$.

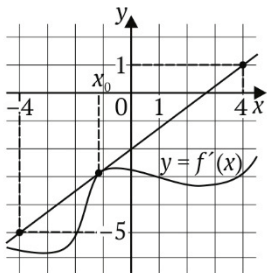


Вариант 19

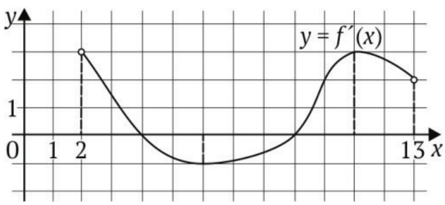
1. На рисунке показан график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



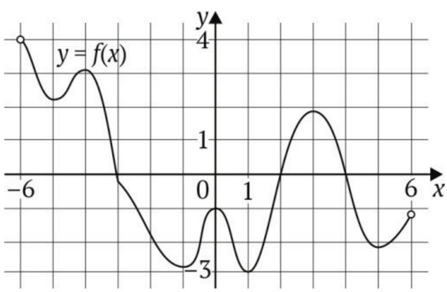
2. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Определите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



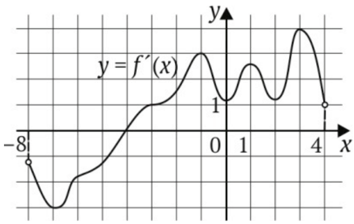
3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке (2; 13). Определите точку минимума функции $f(x)$.



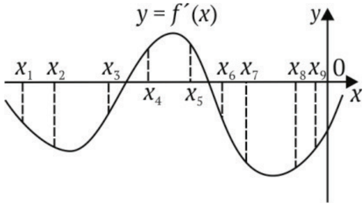
4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке (−6; 6). Укажите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



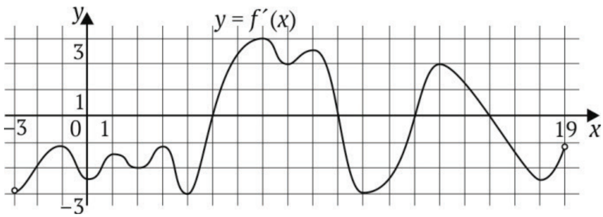
5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



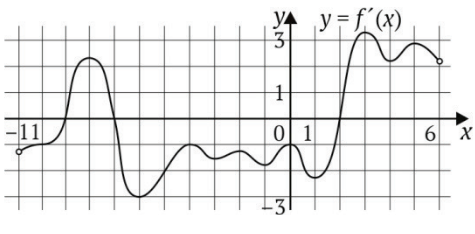
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 19)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 9$ или совпадает с ней.

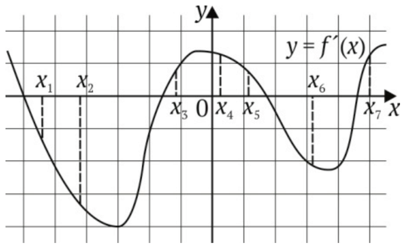


8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-11; 6)$. Укажите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих промежутку $[-10; 0]$.

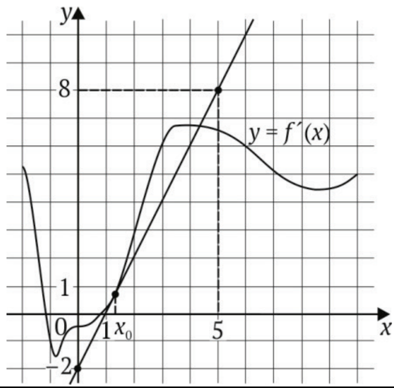


Вариант 20

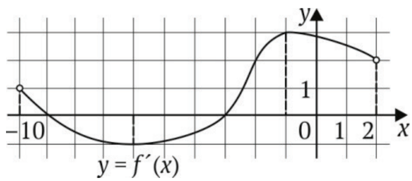
1. На рисунке показан график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены на оси абсцисс точки: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



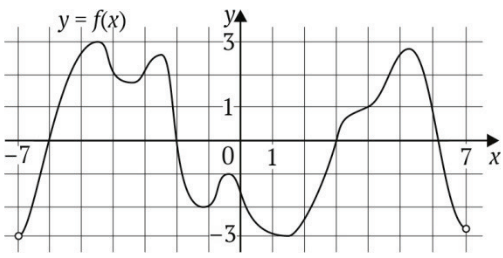
2. На рисунке показаны график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке с абсциссой x_0. Укажите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



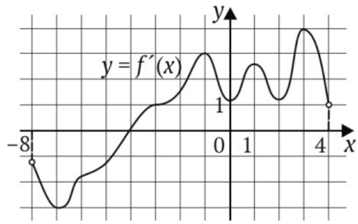
3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-10; 2)$. Определите точку минимума функции $f(x)$.



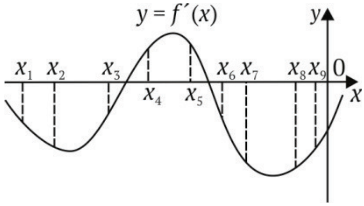
4. На рисунке — график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-7; 7)$. Укажите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



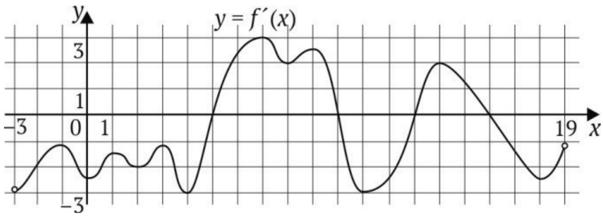
5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-8; 4)$. В какой точке промежутка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



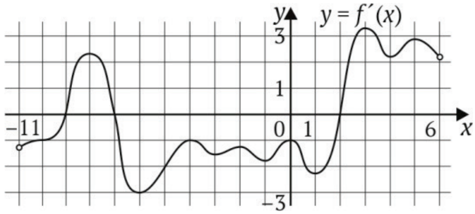
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены точки на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-3; 19)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 12$ или совпадает с ней.



8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-11; 6)$. Укажите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих промежутку $[-6; 4]$.



Ответы к практикуму по теме «Геометрический смысл производной»

Варианты 1–10

Номер задания	Вариант									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	3	3	3	5	4	3	3	3	4	3
2	0,5	1	0,75	−0,25	3	0,25	1,4	0,5	−0,2	2
3	4	4	7	9	−6	−1	4	9	−2	−2
4	6	7	−4	11	−7	−7	−6	11	9	5
5	3	7	3	3	2	3	2	8	0	6
6	4	5	3	4	4	4	9	2	2	5
7	5	5	4	5	4	3	3	3	4	2
8	1	2	1	1	1	1	0	0	1	1

Варианты 11–20

Номер задания	Вариант									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	2	2	3	2	3	4	4	2	3	2
2	−1,25	−1,5	−1,2	1,75	0,4	−3	−0,25	1,5	0,75	2
3	2	4	4	−1	−1	6	3	9	9	−3
4	6	7	3	−4	−3	1	1	8	7	7
5	3	−2	−1	4	−5	3	−4	−4	3	−2
6	3	3	6	1	6	3	3	5	2	7
7	5	2	4	4	5	10	4	4	4	1
8	1	1	2	2	2	1	1	2	1	1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемые в сборнике дидактические подходы и наборы заданий предназначены в помощь учителям математики при организации учебного процесса, прежде всего самостоятельной работы обучающихся. Многовариантные практикумы позволяют решить проблему индивидуализации и дифференциации обучения.

При выполнении представленных заданий обучающиеся смогут на практике применить полученные знания, отработать умения и навыки решения задач, добиться высоких результатов при обучении математике.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 7–9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2010. 384 с.

Баранова Н.Н. Технология уровневой дифференциации и индивидуализации обучения // Начальная школа. 2016. № 2. С. 46–49.

Кушнир И.А. Вторая средняя линия трапеции // Математика в школе. 1993. № 2. С. 56–58.

Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2018: учеб.-метод. пособие. Ростов н/Д.: Легион, 2017. 416 с.

Лысенко Ф.Ф. Математика ЕГЭ-2018. Тематический тренинг. 10–11 классы: учеб.-метод. пособие. Ростов н/Д.: Легион, 2018. 432 с.

Мерзляк А.Г. и др. Алгебра. 9 класс. М.: Вентана-Граф, 2017. 320 с.

Мерзляк А.Г. и др. Дидактические материалы. 9 класс: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Вентана-Граф, 2016. 80 с.

Мордкович А.Г., Александрова Л.А. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. 12-е изд., испр. М.: Мнемозина, 2015. 576 с.

Открытый банк заданий ОГЭ [Электронный ресурс]. URL: http://oge.fipi.ru/os/xmodules/qprint/index.php?proj=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0 (дата обращения: 24.05.2020).

Открытый банк заданий ЕГЭ (базовый уровень) [Электронный ресурс]. URL: http://os.fipi.ru/tasks/22/a (дата обращения: 28.08.2020).

Открытый банк заданий ЕГЭ (профильный уровень) [Электронный ресурс]. URL: http://os.fipi.ru/tasks/2/a (дата обращения: 28.08.2020).

Перевозный А.В. Дифференциация школьного образования как процесс и результат // Инновации в образовании. 2010. № 8. С. 82–94.

Семенов А.В. и др. Единый государственный экзамен. Математика: комплекс материалов для подготовки учащихся: учеб. пособие. М.: Интеллект-Центр, 2016. 144 с.

Суворова Г.Ф. Как продуктивно использовать дифференцированное обучение // Народное образование. 2015. № 5. С. 164–171.

Ященко И.В., Шестаков С.А. Я сдам ОГЭ! Математика. Модульный курс. Практика и диагностика: учеб. пособие для общеобразовательных организаций. М.: Просвещение, 2017а. 385 с.

Ященко И.В., Шестаков С.А. Я сдам ЕГЭ! Математика. Модульный курс. Практика и диагностика: учеб. пособие для общеобразовательных организаций. Профильный уровень. М.: Просвещение, 2017б. 380 с.

Учебное электронное издание

Современные технологии в практике обучения математике старших школьников

Сборник учебно-методических материалов

Редактор, корректор *Ю. А. Бурдина*
Компьютерная верстка: *Т. В. Новикова*
Дизайн обложки: *А. П. Загуменнова*

Подписано к использованию 17.09.2020

Объем данных 10 Мб

Размещено в открытом доступе

Редакционно-издательский отдел
НИУ ВШЭ – Пермь

614070, г. Пермь, ул. Студенческая, д. 38