ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СВЯЗНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ ГРАФОВ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

стр. ___

А.И. Миков

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»: 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Контактные данные: Миков А.И., e-mail: alexander_mikov@mail.ru

Резюме: *Динамические геометрические графы являются естественными математическими моделями многих реальных систем, размещенных и перемещающихся в пространстве. Важным их свойством является связность, поддержание которой во время движения затруднено из-за наличия препятствий на местности. В работе строится модель многосвязной области с препятствиями типа «городские кварталы» и изучается поведение характеристик расположенных в таких областях динамических графов. Для графов разных масштабов найдены зависимости вероятности связности, количества компонент от параметров многосвязной области и от радиуса устойчивого приема / передачи сигналов. Выявлено значительное влияние не только геометрических параметров, но и топологической характеристики многосвязной области. Изучена зависимость вероятности связности графа от направления вектора перемещения сети, оказавшаяся весьма значительной. Полученные результаты могут быть использованы в алгоритмах управления мобильными распределенными системами для обеспечения их пространственной связности.*

Ключевые слова: *вероятность связности, геометрическая конфигурация, компонента графа, мобильная система, отношение сигнал шум, предсказательное моделирование, сеть ad hoc, случайный граф, топологическая характеристика*

CONNECTIVITY OF DYNAMIC GRAPHS IN MULTIPLY CONNECTED SPACES

pages ____

A.I. Mikov

Kuban State University: 350040, Krasnodar, Stavropolskaya str., 149

Summary: *Dynamic geometric graphs are natural mathematical models of many real-world systems placed and moving in space: computer ad hoc networks, transport systems, territorial distributed systems for various purposes. An important property of such graphs is connectivity, which is difficult to maintain during movement due to the presence of obstacles on the ground. In this paper, a model of a multiply connected region with obstacles of the "city blocks" type is constructed and the behavior of the characteristics of dynamic graphs located in such domains is studied. A probabilistic approach to the study of graphs is proposed, in which their characteristics are considered as random processes. For graphs of different scales, dependences of the connectivity probability, the number of components on the parameters of a multiply connected region, and the radius of stable signal reception / transmission were found. The mathematical expectation of the number of components in the starting random geometric graph is found. The significant influence not only of geometrical parameters, but also of the topological characteristics of a multiply-connected domain has been revealed. Graphs of changes in the probability of connectedness of a dynamic graph over time are constructed on the basis of calculating the average value over the set of realizations of the random process of moving network nodes. They are characterized by a periodic component that correlates with the structure of a multiply connected region, and a component that exponentially decreases with time. The dependence of the probability of connectedness of the graph on the direction of the network displacement vector was studied, which turned out to be very significant. The results obtained give an idea of the influence of a multiply-connected domain on the dynamics of graphs, and can be used in control algorithms for mobile distributed systems to ensure their spatial connectivity.*

Keywords: *ad hoc network, connection probability, geometric configuration, graph component, mobile system, prediction modeling, random graph, signal noise ratio, topology characteristic*

Введение

Геометрические графы в качестве математических моделей беспроводных компьютерных сетей изучаются достаточно давно [1]. Каждый такой граф порождается геометрической конфигурацией точек в пространстве и некоторым параметром r – радиусом окружностей, в центрах которых находятся точки этой конфигурации. Порождается граф следующим образом. Множеству точек соответствует множество вершин графа. Две вершины смежны (имеется ребро), если соответствующие окружности пересекаются так, что центр одной окружности находится внутри другой окружности. Предполагается, что сигнал распространяется и воспринимается в условиях прямой видимости, что справедливо для световых сигналов и сигналов СВЧ.

Эта простая модель обычно рассматривается на евклидовой плоскости и хорошо описывает гомогенные сети, состоящие из одинаковых устройств – приемников и передатчиков сигналов, находящихся в одинаковых условиях. Но такая идеальная ситуация встречается достаточно редко. Обычно сети являются гетерогенными, даже не в силу того, что состоят из различных устройств, а потому, что их аккумуляторные батареи имеют различные уровни заряженности, что сказывается на уровне излучаемого радио или светового сигнала и, в итоге, на различном отношении сигнал/шум для разных узлов сети. Как показано в [2] математическая модель в этом случае будет характеризоваться различными значениями ri для различных точек, а порождаемый геометрический граф станет ориентированным (вместо ребер появятся дуги). Евклидова плоскость зачастую также является идеализацией, поскольку в разных точках условия прохождения и степень затухания сигнала различны (например, из-за тумана) или прохождению сигнала мешают препятствия. Препятствия создают эффекты [3] радиотени (зоны молчания, skip-zone), вследствие которых узлы, даже находящиеся на расстоянии меньшем r от передающего узла, не могут принимать его сигнал. Соответствующие ребра отсутствуют в графе сети.

В реальных условиях беспроводные сети можно рассматривать в пространствах всех трех измерений. VANET – преимущественно одномерные сети, геометрия которых определяется расположением дорог, по которым движется транспорт, оборудованный средствами связи. Сети, узлы которых располагаются на спутниках, самолетах или дронах, рассматриваются как трехмерные. Наиболее часто используются сети, располагающиеся на поверхностях, т.е. двумерные. Но во всех трех случаях имеется проблема препятствий распространению сигнала. В математической модели препятствия можно представить некоторыми «изъятиями» из пространства, в котором находятся узлы сети, иначе говоря, область расположения сети рассматривается как *многосвязная*.

Обозначенные проблемы наиболее критичны для ad hoc сетей ввиду того, что решать их приходится не в период проектирования и создания сети, а непосредственно в процессе функционирования [4]. Поэтому важным является предсказательное моделирование, выполняемое для класса ad hoc сетей (по природе своей являющихся динамическими) и дающее некоторые предварительные общие знания, используемые затем в работе сети.

В большинстве случаев такие сети являются динамическими [5], т.е. в математической модели нужно рассматривать не геометрические конфигурации, состоящие из точек пространства, а конфигурации, состоящие из кривых, не пересекающих препятствия – полностью лежащих в многосвязной области. Теоретико-графовые свойства, сформулированные для обыкновенных графов, должны быть пересмотрены для случая динамических графов, рассматриваемых как индексированные семейства графов, или как большие графы [6]. Скажем, такое свойство, как связность (несвязность) уже не является бинарным, а будет кусочно-постоянной функцией параметра (времени). Для случайных динамических графов связность является случайным процессом [7].

Математическая модель

Будем рассматривать препятствия распространению сигнала в форме квадратов со стороной b. Препятствия равномерно расположим на плоскости, расстояние между ближайшими препятствиями обозначим a. Введем систему декартовых координат на плоскости так, что ось x не пересекает ни одного препятствия, и ближайшие к ней препятствия располагаются на одинаковом расстоянии от оси. Аналогичное условие поставим для оси y. Область и количество препятствий будем считать неограниченными как по горизонтали (ось x), так и по вертикали (ось y). Тогда многосвязная область расположения сети Q есть объединение полос:

$$-a/2 + i\,(a + b) \le x \le a/2 + i\,(a + b) \text{ при } i \in \mathrm{Z},$$
$$-a/2 + j\,(a + b) \le y \le a/2 + j\,(a + b) \text{ при } j \in \mathrm{Z}.$$

Препятствие (i, j) задается одновременным выполнением четырех неравенств:

$$(a/2 + i\,(a + b) \le x \le (a/2 + b + i\,(a + b),$$
$$(a/2 + j\,(a + b) \le y \le (a/2 + b + j\,(a + b),$$

Препятствие с номером (0, 0) находится в начале I квадранта неограниченной многосвязной области Q.

В настоящей работе динамический случайный граф задается случайным начальным (стартовым) графом и правилами перемещения вершин. Начальный граф $G(t = 0)$ располагается в некоторой подобласти многосвязной области расположения динамического графа G. Будем считать начальный граф случайным, порождаемым на основе следующих условий:

1) Область расположения узлов (вершин) динамического графа – многосвязная, неограниченная, описанная выше как «городские кварталы». В числовых примерах и графиках ее параметры: $a = 2$, $b \ge 1$.
2) Вершины начального графа независимо и равномерно распределены в подобласти $S = \{0 \le x \le 10;\ 0 \le y \le 10\}$ с исключенными «препятствиями». Равномерность означает, что вероятность попасть вершине в любой прямоугольник, полностью лежащий в S, определяется его площадью, но не положением в S.

3) Радиусы r всех узлов одинаковы. В числовых примерах $r \geq 1$.

На рис. 1 представлен пример реализации стартового графа, состоящего из 10 вершин, 7 ребер и 3 компонент.

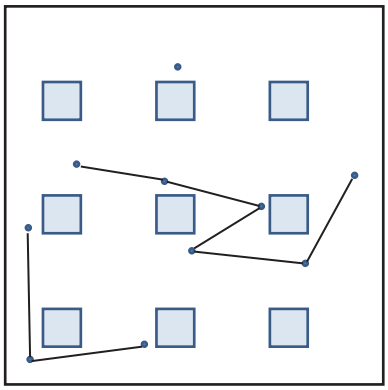

Рис. 1. Граф в многосвязной области

Две вершины графа не связаны между собой ребром, если расстояние между ними не меньше радиуса r или потенциальное ребро пересекает хотя бы одно препятствие.

Задачи и результаты исследования

Основное свойство графа, определяющее надежность и живучесть мобильной беспроводной компьютерной ad hoc сети – связность. Оно зависит как от параметров области a и b, так и от количества вершин n и величины радиуса r. Для случайных графов характеристикой связности является вероятность связности, для случайных динамических графов важную информацию дает зависимость вероятности связности от времени. Оставшаяся часть статьи посвящена описанию этих зависимостей.

На рис. 2 приведено семейство зависимостей вероятности связности графа от величины радиуса при различных размерах препятствий в многосвязной области. Относительная ошибка оценки вероятности порядка 0,003.

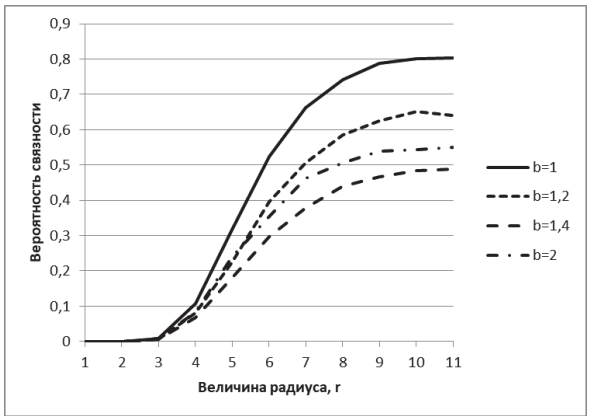

Рис. 2. Вероятность связности начального графа при n = 10.

Здесь сразу заметно отличие от односвязной области: асимптотически вероятность не стремится к единице, а ограничивается значениями 0,8 (при $b = 1$) и менее. Это связано с тем, что случайное расположение вершин в области с препятствиями может быть таким, что отдельные вершины или группы вершин будут находиться в «радиотени». Эффект препятствий менее заметен в графах с большим количеством (более 40) вершин при аналогичных размерах препятствий.

Особенности расположения графа в многосвязной области этим не ограничиваются. На рис. 3 представлена та же вероятность связности, но в зависимости от размера b препятствий при $n = 10$. Она оказывается немонотонной.

Расчеты проводились для той же подобласти $S = \{0 \leq x \leq 10;\ 0 \leq y \leq 10\}$ при фиксированном параметре $a = 2$ и увеличивающемся значении параметра b.

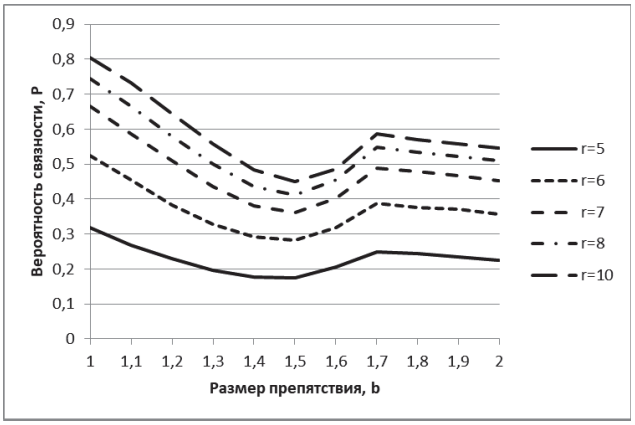

Рис. 3. Зависимость вероятности связности графа от размера препятствий при n = 10

При увеличении размера препятствий, т.е. «изъятий» из области, ее эффективная площадь (площадь, на которой могут располагаться вершины графа) уменьшается. Например, при $b = 1$ площадь области S равна $|S| = 91$. При фиксированных количестве вершин и радиусе в ситуации односвязной области это должно приводить к увеличению вероятности связности графа. Однако в нашем случае превалирует влияние увеличения радиотени – вероятность снижается. Затем, начиная с $b = 1{,}5$, следует значительное увеличение вероятности, прекращающееся около значения $b = 1{,}7$. «Аномальный» участок $1{,}6 \leq b \leq 1{,}7$ более детально представлен на рис. 4.

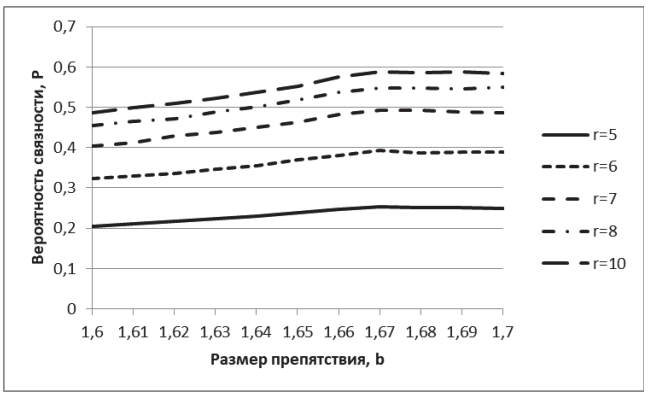

Рис. 4. Детализация графика, представленного на рис. 3

Еще более ярко отмеченный эффект проявляется для графов с большим количеством вершин. На рис. 5 и 6 те же зависимости показаны для случая $n = 40$. При увеличении

размера препятствий отмечается снижение вероятности связности на величину 0,3 и более, а затем ее резкое возрастание на участке $1{,}6 \le b \le 1{,}7$ почти на такие же величины.

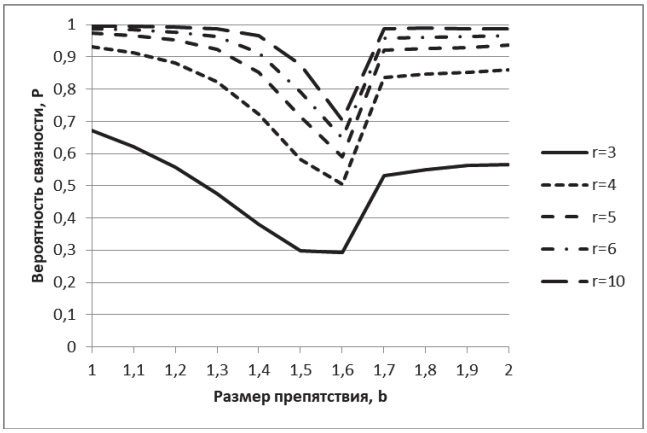

Рис. 5. Зависимость вероятности связности графа от размера препятствий при n = 40

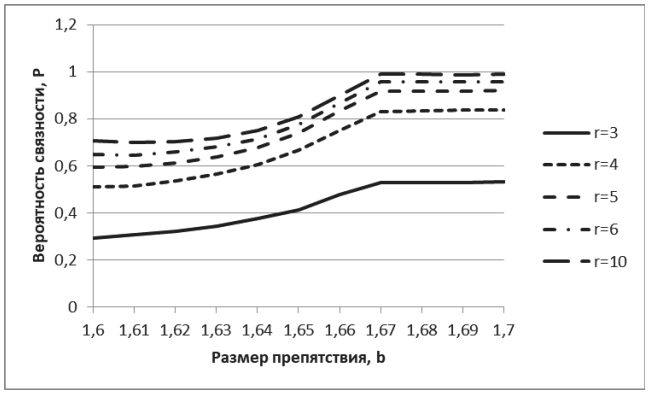

Рис. 6. Детализация графика, представленного на рис. 5

Объяснение такого поведения графиков лежит в области топологии. Исходный случайный граф при $a = 2$, $b = 1$ располагался в k-связной области ($k = 10$), внешняя граница – квадрат, плюс 9 квадратных исключений из области. При увеличении b до значения 1,6(6) «работают» законы геометрии, происходят непрерывные изменения размеров, уменьшается эффективная площадь от значения 91 до значения 75. Но при $b = 1{,}6(6)$ происходит «смыкание» пяти квадратных препятствий с внешней границей области S (рис. 7). Математически это означает изменение внешней границы области, она превращается в ломаную линию, составленную из 22 отрезков.

Но главное – изменяется ее топологическая характеристика, область становится пятисвязной ($k = 5$), с четырьмя внутренними препятствиями. Легко видеть, что в пределах рассматриваемого участка $1 \le b \le 2$ дальнейшее увеличение параметра не приводит ни к изменению эффективной площади (она остается равной 75), ни к изменению топологической характеристики области расположения графа, что при больших радиусах r выражается в стабильности вероятности связности.

Отмеченные эффекты важны с точки зрения изучения динамики графов, поскольку при перемещении вершин (узлов сети) в многосвязной области изменяется топологическая характеристика той подобласти, в которой фактически располагаются вершины графа. Границей этой подобласти можно считать выпуклую оболочку для множества точек, образующих соответствующую вершинам графа геометрическую конфигурацию.

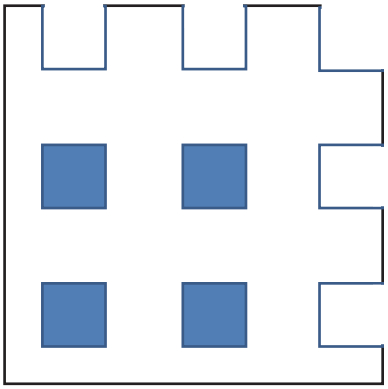

Рис. 7. Изменение топологии многосвязной области

Если динамический граф не связен в данный момент времени, то важной характеристикой становится число его компонент. В мобильной ad hoc сети, граф которой несвязен, не все сообщения могут быть быстро переданы, но при дальнейшем перемещении отдельные компоненты могут соединяться между собой, как, впрочем, и некоторые компоненты могут разделяться на более мелкие. При соединении компонент задержанные из-за отсутствия маршрута сообщения получают возможность дальнейшего продвижения, если и не до адресата, то до следующей близкой к нему компоненты. Ситуация подобна тем, что встречается в оппортунистических сетях. Поэтому, для несвязных графов изучение их компонентного состава выходит на первый план.

На рис. 8 представлены зависимости математического ожидания количества компонент в графе от величины радиуса при тех же условиях, что описаны выше. Зависимости представлены для сетей среднего размера (20 и 40 узлов) и крайних размеров рассматривавшихся препятствий в области S ($b = 1$ и $b = 2$).

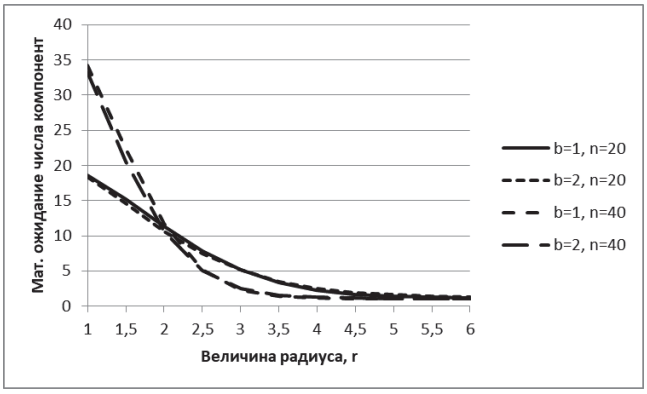

Рис. 8. Математическое ожидание числа компонент графа

В отличие от вероятности связности графа математическое ожидание числа компонент – более устойчивая

характеристика по отношению к размеру препятствий в многосвязной области. Зависимость же от радиуса r имеет двойственный характер. При небольших радиусах математическое ожидание числа компонент быстро и практически линейно уменьшается с ростом радиуса. При больших радиусах среднее число компонент незначительно превышает единицу. Причем, чем больше сеть, тем быстрее наступает момент стабилизации. На рис. 9 приведены значения вероятностей того, что граф состоит точно из двух компонент.

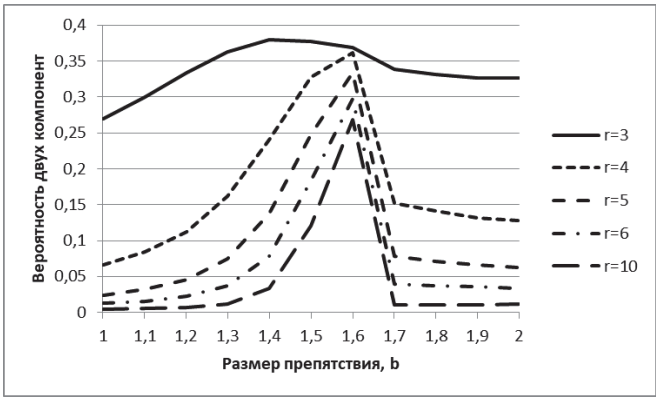

Рис. 9. Вероятность двух компонент в графе, n = 40

Зависимости этих вероятностей от размеров препятствий полезно сравнить с графиками рис. 5 вероятностей связности графа (т.е. вероятности того, что граф состоит из одной компоненты). Отмеченный там эффект изменения топологии области имеет место и здесь, но антисимметрично: снижению, а потом скачкообразному увеличению вероятности на рис. 5 соответствует увеличение, а затем, скачкообразное уменьшение вероятности на рис. 9. Можно сделать вывод: при изменении размера препятствия, предшествующего изменению топологии, многие связные графы «распадаются» на двухкомпонентные, а после изменения топологии идет быстрый «обратный процесс».

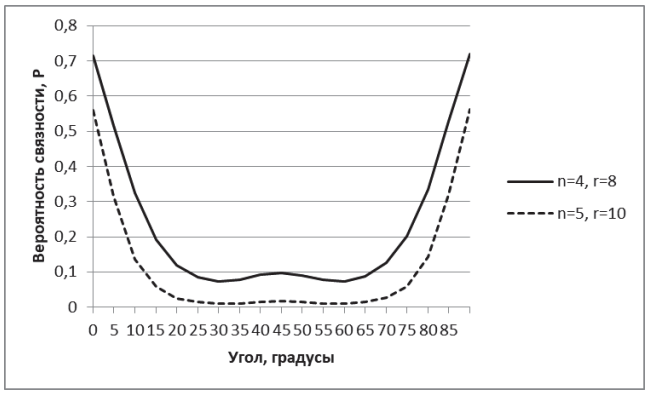

Рис. 10. Зависимость вероятности связности графа от направления движения

Как показывают расчеты, изменения динамического графа в описанной многосвязной области зависят от направления перемещения вершин графа (рис. 10). Вершины графов с $n = 4$ и $n = 5$ перемещались из стартовой области ($t = 0$) с одинаковыми единичными скоростями в одном и том же направлении до момента времени $t = 3$. Начальные графы $G(0)$ при этом были случайными, и могли быть как связными, так и не связными. При движении вдоль оси x (угол равен нулю) к моменту времени $t = 3$ с вероятностью графы $G(3)$ были связными с вероятностью 0,71 (при $n = 4$) и 0,56 (при $n = 5$). Точно такая же картина наблюдается для угла 90 градусов (движение вдоль оси y).

При изменении направления перемещения от 0 до 30 градусов наблюдается резкое уменьшение вероятности связности графов до значений 0,07 (при $n = 4$) и 0,01 (при $n = 5$). Незначительное увеличение вероятности имеет место на участке от 30 до 45 градусов. Ввиду симметрии многосвязной области такая же картина имеет место для углов II, III и IV квадрантов.

На рис. 11 показано как связность динамического графа изменяется с течением времени. Числовые данные приведены для графов с 10 вершинами, движущихся с единичной скоростью по многосвязной области. Рассматривались четыре варианта: в двух вариантах радиус уверенного приема / передачи сигнала составлял 5 единиц, в двух других – 10 единиц. Угол, под которым двигались вершины по отношению к оси x, в одном случае был равен 0 (для всех вершин графа), в другом случае равен 45 градусам. Приведены значения условной вероятности – все случайные стартовые графы являются связными.

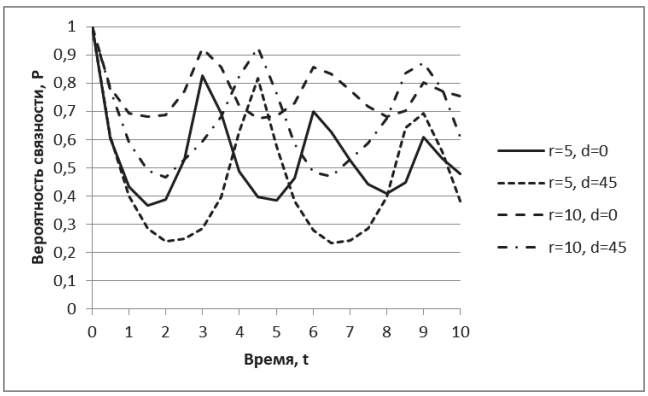

Рис.11. Условная вероятность связности графов при n = 10

Поэтому $P\{t = 0\} = 1$, а затем значения вероятности с постоянным периодом увеличиваются и уменьшаются, с общей тенденцией к снижению максимумов. Снижение максимумов вероятности имеет отрицательный экспоненциальный характер. Величины максимумов и минимумов зависят как от величины радиуса r, так и от угла d, длина периода определяется, в основном, величиной угла d.

Заключение

Исследование случайных динамических геометрических графов, расположенных в многосвязных областях, показало, что зависимость вероятности связности графа от основных параметров – размера препятствий, времени, угла (направления движения) – имеет немонотонный характер. Значительное влияние оказывает дискретный параметр –

топологическая характеристика, порядок связности области. Хотя в процессе перемещения вершин динамического графа количество компонент графа может как увеличиваться, так и уменьшаться, несвязный граф может становиться связным, но основная тенденция для многосвязной области – уменьшение со временем вероятности связности графа. Полученные результаты могут быть использованы в предсказательном моделировании сложно структурированных систем.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00359. Автор благодарит рецензента д.ф.-м.н., профессора С.В. Русакова.

Acknowledgments. The reported study was funded by RFBR, project number 18-01-00359.

Конфликт интересов отсутствует.

There are is no conflict of interest.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Penrose M.** Random geometric graphs. Oxford Studies in Probability. Oxford: Oxford University Press, 2004, p. 330.
2. **Миков А.И.** Динамические геометрические графы мобильных ad hoc сетей // Информатизация и связь. 2017. № 2. С. 66-70.
3. **Léo Y., Crespelle C., Fleury E.** Non-altering time scales for aggregation of dynamic networks into series of graphs // Computer Networks. 2019. V. 149. P. 108-119.
4. **Ducourthial B., Wade A.M.** Dynamic p-graphs for capturing the dynamics of distributed systems // Ad Hoc Networks. 2016. V. 50. P. 13-22.
5. **Lin Y., Wang X., Zhang L., Li P., Zhang D., Liu S.** The impact of node velocity diversity on mobile opportunistic network performance // Journal of Network and Computer Applications. 2015. V. 55. P. 47-58.
6. **Aridhi S., Montresor A., Velegrakis Y.** BLADYG: A Graph Processing Framework for Large Dynamic Graphs // Big Data Research. 2017. V. 9. P. 9-17.
7. **Ramiro V., Lochin E., Sénac P.** Characterization and Applications of Temporal Random Walks on Opportunistic Networks //Computer Networks. 2016. V. 111. P. 29-44.

Поступила
УДК 519.173.1, 519.245

REFERENCES

1. **Penrose M.** Random geometric graphs. Oxford Studies in Probability. Oxford: Oxford University Press, 2004, p. 330.
2. **Mikov A.I.** Dynamic geometric graphs of mobile hoc networks. Informatizatcia i svyaz. Informatization and communication. 2017, 2: 66-70. [In Russian].
3. **Léo Y., Crespelle C., Fleury E.** Non-altering time scales for aggregation of dynamic networks into series of graphs. Computer Networks. 2019. 149: 108-119.
4. **Ducourthial B., Wade A.M.** Dynamic p-graphs for capturing the dynamics of distributed systems. Ad Hoc Networks. 2016. 50: 13-22.
5. **Lin Y., Wang X., Zhang L., Li P., Zhang D., Liu S.** The impact of node velocity diversity on mobile opportunistic network performance. Journal of Network and Computer Applications. 2015. 55: 47-58.
6. **Aridhi S., Montresor A., Velegrakis Y.** BLADYG: A Graph Processing Framework for Large Dynamic Graphs. Big Data Research. 2017. 9: 9-17.
7. Ramiro V., Lochin E., Sénac P. Characterization and Applications of Temporal Random Walks on Opportunistic Networks. Computer Networks. 2016. 111: 29-44.

Received
UDK 519.173.1, 519.245

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Миков Александр Иванович – д.ф.-м.н., профессор, Кубанский государственный университет
e-mail: alexander_mikov@mail.ru

AUTHOR'S INFORMATION

Alexander Mikov – doctor of physics and mathematics, professor, Kuban State University.
e-mail: alexander_mikov@mail.ru