Дана функция $f(x)=3x-5$; $g(x)$ — обратная к $f(x)$ функция. Найти наибольшее значение $f(-3g^2(x)+1)$.

Решение. $g(x)=\frac{x+5}{3}$

$$f(-3g^2(x)+1)=3\cdot(-3g^2(x)+1)-5=-9g^2(x)-2=-9\cdot\left(\frac{x+5}{3}\right)^2-2=-(x+5)^2-2.$$

Ответ: -2.

Для функции $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ найти обратную.

Комментарий. Поменяв местами x и y, получим $x=\ln(\sqrt{y^2+1}-y)$, откуда $e^x=\sqrt{y^2+1}-y \iff \sqrt{y^2+1}=y+e^x \iff \begin{cases} y+e^x\geqslant 0 \\ y^2+1=(y+e^x)^2 \end{cases}$.

Отсюда легко находится $y=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$, т.е. ответ $y=0{,}5\cdot(e^x-e^{-x})$.

Замечание. Область определения функции $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ есть R. Действительно, $\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geqslant 0$ $\forall x\in R$.

Кстати, функция $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ убывает на R.

Исследовать функцию $y(x) = (\sin x) \cdot \ln \frac{2-x}{2+x}$ на чётность – нечётность.

Решение. $\mathcal{D}(y) = (-2;\, 2)$.

$$y(-x) = (\sin(-x)) \cdot \ln \frac{2+x}{2-x} =$$

$$= -(\sin x) \cdot \ln \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = (\sin x) \cdot \ln \frac{2-x}{2+x} = y(x).$$

Итак, $y(-x) = y(x) \ \forall x \in \mathcal{D}(y)$.

Значит, данная функция является чётной.

Пусть $f(x)$ – чётная функция, определённая на R, периодическая с периодом 6, причём $f(x)=\begin{cases}-2x+4, \text{если } x\in[0;2] \\ 4x-8, \text{если } x\in[2;3].\end{cases}$ Найти $f(2015)$.

<u>Решение</u>. $f(2015)=f(6\cdot 336-1)=f(-1)=f(1)=-2\cdot 1+4=2.$

Найти $E(y)$, где $y=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$.

<u>Решение</u>. $D(y)=[-4;4]$.

$$\begin{cases} y\geqslant 0 \\ y^2=8+2\sqrt{16-x^2}\end{cases}$$

Т.к $\sqrt{16-x^2}$ принимает все значения из $[0;4]$, то y^2 принимает все значения из $[8;16]$. С учётом $y\geqslant 0$ получаем, что $E(y)=[2\sqrt{2};4]$.

Найти наименьшее значение функции $y = \frac{8x^2+32x+34}{x^2+4x+5}$.

<u>Комментарий</u>. $y = 8 - \frac{6}{(x+2)^2+1}$. Оценивая сначала знаменатель и т. д., найдём $E(y) = [2; 8)$. Ответ: 2.

Найти наибольшее значение функции $y = \frac{15}{5+\sin x - \cos^2 x}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

<u>Комментарий</u>. $y = \frac{15}{\sin^2 x + \sin x + 4}$; $y = \frac{15}{\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}$.

$y_{наибол.} = \frac{15}{\frac{15}{4}} = 4$ $\quad y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4$.

Найти область значений функции $y = \dfrac{6\sin x}{3\sin x + 2}$, где $x \in \left(-\pi; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Пусть $t = \sin x$, $x \in \left(-\pi; \frac{\pi}{6}\right)$, тогда $t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$.

$$y = 2 - \frac{4}{3t+2}.$$

Т.к $t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$, то $-1 \leq 3t + 2 < \frac{7}{2}$

$$\frac{1}{3t+2} \in (-\infty; -1] \cup \left(\frac{2}{7}; +\infty\right)$$

$$\frac{4}{3t+2} \in (-\infty; -4] \cup \left(\frac{8}{7}; +\infty\right)$$

$$-\frac{4}{3t+2} \in \left(-\infty; -\frac{8}{7}\right) \cup [4; +\infty)$$

$$E(y) = \left(-\infty; \frac{6}{7}\right) \cup [6; +\infty).$$

Другой подход. В тех же обозначениях задачу можно переформулировать так: при каком значении параметра y уравнение $y = \dfrac{6t}{3t+2}$ имеет хотя бы одно решение $t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$.

Отсюда $t = \dfrac{2y}{6-3y}$. Осталось решить систему $-1 \leq \dfrac{2y}{6-3y} < \dfrac{1}{2}$.

Найти наибольшее значение $\sqrt{x^2+y^2}$ в области $\begin{cases} -2 \le y+2x \le 4 \\ -2 \le y+x \le -1 \end{cases}$.

Комментарий. Величину $\sqrt{x^2+y^2}$ можно рассматривать как расстояние от $O(0;0)$ до $M(x;y)$, где точка M „бегает" по указанной области. Данная область — это пересечение двух „полос", т.е. параллелограмм, и нам надо найти расстояние от $O(0;0)$ до самой удалённой от O точки $A(6;-8)$. Ответ: 10.

Найти наименьшее значение $M = |2x-y| + \sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}$.

Решение. $\vec{a}\{0;\ 2x-y\}$

$\vec{b}\{x-7;\ y+1\}$

$\vec{a}+\vec{b} = \{x-7;\ 2x+1\}$.

$M = |\vec{a}|+|\vec{b}| \geqslant |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(x-7)^2+(2x+1)^2} =$

$= \sqrt{5}\cdot\sqrt{(x-1)^2+9} \geqslant \sqrt{5}\cdot\sqrt{9} = 3\sqrt{5}$.

$M_{наим.} = 3\sqrt{5}$ (достигается при $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$).

Решить уравнение $\sqrt{2\cdot\left(\sin^2\frac{\pi xy}{2}+1+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi xy}{2}\right)}=-y^2+2y+1.$ (*)

Решение. Т.к. $\sin^2\frac{\pi xy}{2}+1+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi xy}{2}=\sin^2\frac{\pi xy}{2}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi xy}{2}}\geqslant 2$, то левая часть уравнения не меньше, чем $\sqrt{2\cdot 2}=2$. А правая часть уравнения $-y^2+2y+1=2-(y-1)^2\leqslant 2$. Поэтому, если (*) и имеет решения, то только в случае, когда обе части уравнения равны по 2, т.е. (*) $\Longleftrightarrow \begin{cases}\sin^2\frac{\pi xy}{2}=1\\ 2-(y-1)^2=2\end{cases}$

Ответ: $(2n+1;\ 1),\ n\in\mathbb{Z}$.

Найти наименьшее значение функции $y=4^{\mathrm{tg}\,x}+2^{5-2\mathrm{tg}\,x}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $a+b\geqslant 2\sqrt{a\cdot b}$ при $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$,

причём $a+b=2\sqrt{ab}\Longleftrightarrow a=b$.

$y=2^{2\mathrm{tg}\,x}+2^{5-2\mathrm{tg}\,x}\geqslant 2\cdot\sqrt{2^5}$. Итак, $y\geqslant 8\cdot\sqrt{2}\ \forall x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$,

причём $y=8\sqrt{2}\Longleftrightarrow 2^{2\mathrm{tg}\,x}=2^{5-2\mathrm{tg}\,x}\Longleftrightarrow \mathrm{tg}\,x=\frac{5}{4}$. Ответ: $8\sqrt{2}$.

Найти наименьшее значение выражения $\frac{5}{2}x^8 + \frac{2}{5}y^8 + \frac{2}{x^4 \cdot y^4}$.

Ответ: 4.

Решить уравнение $(-4x - x^2 - 3) \cdot \log_2 \left(1 + \sin^2 \frac{5\pi x}{4}\right) = 1$

Ответ: -2.

Решить неравенство $2\pi + 4 \cdot \arcsin x \leq -x^2 - 2x - 1$.

Ответ: -1.

Решить неравенство $\left(x^2 - 4x + 8\right)^{-1} \geq 2^{-4} \cdot \left(|x+2| + |x-2|\right)$.

Указание. Область значений левой части неравенства: $\left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Область значений правой части неравенства: $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $x = 2$.

Найти наибольшее значение функции $y = \frac{1}{\pi} \cdot \arccos(x-5) + |x-7|$.

<u>Решение</u>. $D(y) = [4; 6]$. На $D(y)$ $|x-7| = 7-x$.

$y = \frac{1}{\pi} \cdot \arccos(x-5) + (7-x)$. Эта функция убывает на $D(y)$ как сумма двух убывающих на $D(y)$ функций, поэтому её наибольшее значение равно $y(4) = \frac{1}{\pi} \cdot \pi + 3 = 4$.

Сравнить, что больше: $2015^{2016} \vee 2016^{2015}$.

<u>Комментарий</u>.

$$\ln\left(2015^{2016}\right) \vee \ln\left(2016^{2015}\right)$$

$$2016 \cdot \ln 2015 \vee 2015 \cdot \ln 2016$$

$$\frac{\ln 2015}{2015} \vee \frac{\ln 2016}{2016}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. С помощью производной выясним, что на промежутке $[e; +\infty)$ она убывает, поэтому $f(2015) > f(2016)$, т.е. $\frac{\ln 2015}{2015} > \frac{\ln 2016}{2016}$. Значит, $2015^{2016} > 2016^{2015}$.

Решите неравенство $4x+2+\sqrt{4-x} > x^2+\sqrt{x^2-5x+2}$

(Олимпиада МГУ „Покори Воробьёвы горы").

<u>Решение.</u> $(4-x)+\sqrt{4-x} > (x^2-5x+2)+\sqrt{x^2-5x+2}$. $(*)$

Рассмотрим функцию $f(t)=t+\sqrt{t}$, тогда $(*)$ можно записать так:

$$f(4-x) > f(x^2-5x+2) \quad (**).$$

Т.к $f(t)$ возрастает на $[0;+\infty)$, то $(**) \Leftrightarrow 4-x > x^2-5x+2 \geqslant 0$.

Ответ: $\left(2-\sqrt{6};\ \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right]$.

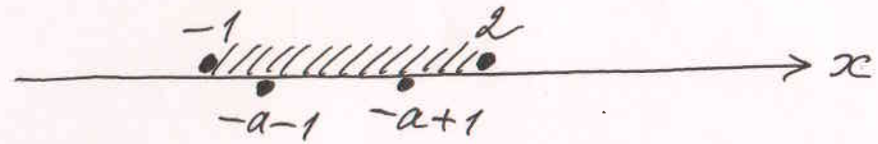
При каких α решением уравнения $x = \sin\alpha + x\cdot\cos\alpha$ является любое число?

<u>Решение.</u> $(1-\cos\alpha)\cdot x = \sin\alpha$. Решением этого уравнения будет любое число, если $\begin{cases} 1-\cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}$. Ответ: $\alpha = 2\pi n,\ n\in \mathbb{Z}$.

$a = ?$ Уравнение $\dfrac{|x^2-x-2|}{x^2-x-2} + (x+a)^2 = 0$ имеет два корня.

<u>Решение.</u> 1й случай $\boxed{x^2-x-2>0}$ $\quad 1+(x+a)^2=0$ решений нет.

2й случай $\boxed{x^2-x-2<0}$ $\quad -1+(x+a)^2=0$; $x = -a\pm 1$.



Два корня будет, когда $\begin{cases} -1 \le -a-1 \\ -a+1 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le a \le 0$.

Ответ: $[-1;0]$.

При каких a уравнение $(2x-a)\cdot\lg(x+2)=0$ имеет только один корень?

<u>Решение.</u> $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-a=0 \\ x+2>0 \end{cases} \\ \lg(x+2)=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ x>-2 \end{cases} \\ x=-1 \end{array}\right.$ Только один корень будет, если либо система не имеет реш., т.е $\frac{a}{2}\leq -2$, либо система имеет решение, но оно совпадает с $x=-1$, т.е. $\frac{a}{2}=1$.

Ответ: $(-\infty;-4]\cup\{2\}$.

При каких a уравнение $3^a\cdot 2^{|x|}=28-\cos x+3\cdot|x|$ имеет нечётное количество корней?

<u>Решение.</u> Если x_0 — корень данного уравнения, то $-x_0$ — тоже его корень, поэтому для нечётности количества корней надо, чтобы $x_0=0$ был корнем (т.е когда $x_0=-x_0$).

Подставляем $x=0$ в уравнение, получаем $3^a=27$, т.е $a=3$.

Ответ: при $a=3$.

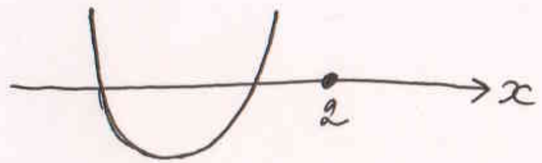
При каких a уравнение $|2x+a-2| = |x-2a-5|$ имеет два различных корня, равноудалённых от $x=1$?

<u>Решение</u>. $\left[\begin{array}{l} 2x+a-2 = x-2a-5 \\ 2x+a-2 = -x+2a+5 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -3a-3 \\ x = \frac{a+7}{3} \end{array}\right.$.

$\frac{x_1+x_2}{2} = 1$; $-3a-3+\frac{a+7}{3} = 2$; $\underline{a=-1}$. При этом корни 0 и 2.

Указать все a, при которых больший корень уравнения $x^2-2(a-2)x+a^2-3a=0$ меньше 2.

<u>Комментарий</u>.



$\begin{cases} f(2) > 0 \\ x_в < 2 \\ D > 0 \end{cases}$ Ответ: $a < 3$.

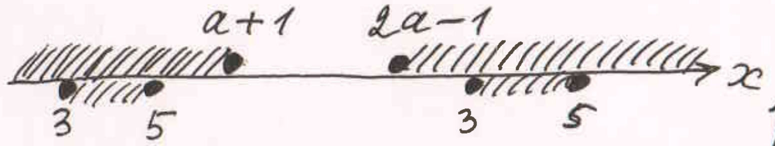
Можно решать и „в лоб": $a-2+\sqrt{4-a} < 2$

$a = ?$ $x^2 - 3ax + (a+1)(2a-1) \geqslant 0$ $\forall x \in [3; 5]$.

Решение. $(x-(a+1))\cdot(x-(2a-1)) \geqslant 0$

1й случай. $a+1 < 2a-1$

$\boxed{a > 2}$



$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+1 \geqslant 5 \\ 2a-1 \leqslant 3 \end{array}\right. \\ a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{a \geqslant 4}.$

2й случай $a+1 > 2a-1$

$\boxed{a < 2}$

Рассматривается аналогично. $\underline{a < 2}$.

3й случай $a+1 = 2a-1$. Удовлетворяет условию. $\underline{a = 2}$.

$\boxed{a = 2}$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$.

При каких a решениями неравенства $|2x-a| \leq |x-1|$ является отрезок длины 1?

Решение. $|2x-a|^2 \leq |x-1|^2$; $4x^2-4ax+a^2 \leq x^2-2x+1$

$$3x^2-2(2a-1)\cdot x+a^2-1 \leq 0$$

Корнями соответствующего квадратного уравнения являются $a-1$ и $\frac{a+1}{3}$. Условию задачи соответствуют те a, для которых $\left|a-1-\frac{a+1}{3}\right|=1$, т.е. $a=\frac{7}{2}$, $a=\frac{1}{2}$.

При каких a неравенство $|2\sin^2 x - 2a\cdot\sin x\cdot\cos x + 4\cos^2 x + a| \leq 5$ выполняется при всех x?

<u>Комментарий.</u> $|1-\cos 2x - a\cdot\sin 2x + 2 + 2\cos 2x + a| \leq 5.$

$$-5 \leq -a\cdot\sin 2x + \cos 2x + a + 3 \leq 5.$$

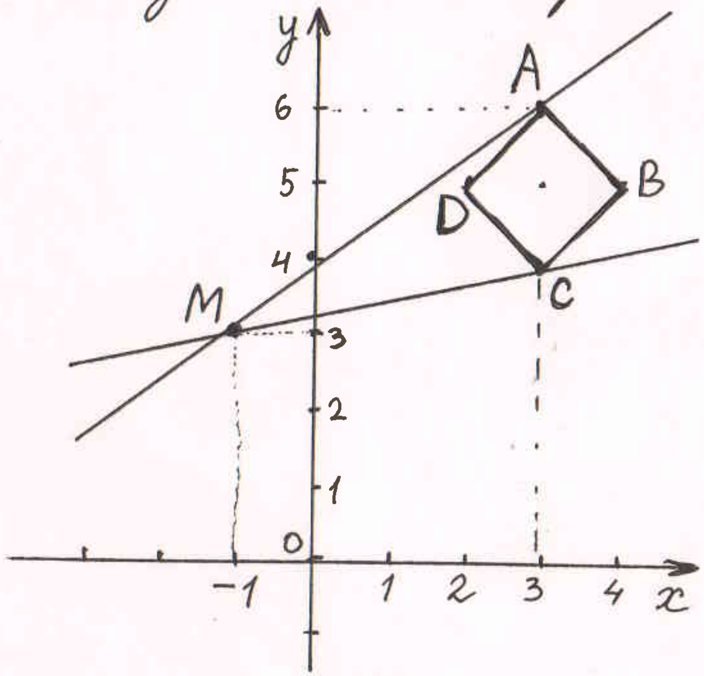
$$a - 2 \leq a\cdot\sin 2x - \cos 2x \leq a + 8 \quad (*).$$

Областью значений выражения $a\cdot\sin 2x - \cos 2x$ является $[-\sqrt{a^2+1}; \sqrt{a^2+1}]$.

Т.к. $(*)$ должно выполняться при всех x, то этот отрезок должен содержаться в отрезке $[a-2; a+8]$, т.е. $\begin{cases} a-2 \leq -\sqrt{a^2+1} \\ \sqrt{a^2+1} \leq a+8 \end{cases}$.

Решив эту систему, мы и получим ответ на вопрос задачи.

При каких a система $\begin{cases} |x-3|+|y-5|=1 \\ y-a=ax+3 \end{cases}$ имеет единственное реш.?



Решение. Первое уравнение системы задаёт на координатной плоскости квадрат $ABCD$ с центром $(3;5)$ и вершинами $A(3;6)$, $B(4;5)$, $C(3;4)$, $D(2;5)$.

Прямая $y=a\cdot(x+1)+3$ при любом a проходит через точку $M(-1;3)$.

Эта прямая будет иметь с квадратом $ABCD$ единственную общую точку в случаях MA и MC. В первом случае угловой коэффициент прямой равен $\frac{3}{4}$, во втором случае он равен $\frac{1}{4}$. А т.к. у нашей прямой угловой коэффициент равен a, то ответ $a=\frac{3}{4}$; $a=\frac{1}{4}$.

При каких a уравнение $3x^2 - x^3 + a = 0$ имеет более двух корней?

Комментарий. Запишем уравнение в виде $a = x^3 - 3x^2$ и рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$. Далее исследуем эту функцию с помощью производной и строим её график. А затем смотрим, при каких a прямая $y = a$ имеет более двух общих точек с графиком $f(x)$.

Ответ: $(-4; 0)$.

При каких a уравнение $e^x = ax$ имеет 2 решения?

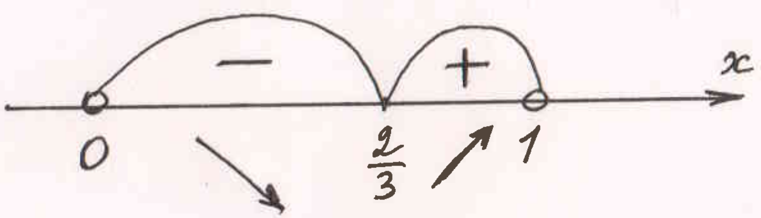
Комментарий. $x = 0$ не является корнем ни при каком a, т.к $e^0 \neq a \cdot 0$. При $x \neq 0$ можно записать уравнение так: $\frac{e^x}{x} = a$ и рассмотреть функцию $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Исследуем $f(x)$ с помощью производной и построим график. Остается ответить на вопрос „при каких a прямая $y = a$ имеет ровно две общие точки с графиком функции $y = f(x)$.

Ответ: при $a > e$.

Найти наименьшее значение a, при котором уравнение $ax^2-(a+3)\cdot x+4=0$ имеет хотя бы одно реш. на промеж. $(0;1)$.

<u>Комментарий</u>. $\dfrac{4-3x}{x(1-x)}=a$. Задачу можно сформулировать так: „Найти наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{4-3x}{x(1-x)}$ на промежутке $(0;1)$."

$$f'(x)=\ldots=-\frac{(x-2)(3x-2)}{x^2\cdot(1-x)^2}.$$



Наименьшее значение функции $f(x)$ на $(0;1)$ равно $f\left(\frac{2}{3}\right)=9$.

Ответ: 9.

Найдите наименьшее значение выражения $x + y\cdot\sqrt{3}$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

<u>Комментарий</u>. Обозначим $x + \sqrt{3}\cdot y = a$, тогда задача сводится к нахождению наименьшего значения параметра a, при котором система $\begin{cases} x + y\cdot\sqrt{3} = a \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. Другими словами, ищем наименьшее a, при котором неравенство $(a - y\sqrt{3})^2 + y^2 \leq 1$ имеет хотя бы одно решение. Преобразовав последнее неравенство к виду $4y^2 - 2\sqrt{3}\cdot ay + a^2 - 1 \leq 0$, потребуем, чтобы дискриминант соответствующего квадратного трёхчлена был неотрицательным, тогда получаем $|a| \leq 2$. Ответ: -2.

Найти расстояние между линиями $y=\sqrt{3x+1}$ и $y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$.

Комментарий. Надо найти расстояние между двумя параллельными прямыми, одна из которых данная, а другая $y=\frac{3}{4}x+b$ параллельна ей и касается графика функции $y=\sqrt{3x+1}$. Используя геометрический смысл производной, получим

$$\begin{cases} \frac{3}{2\sqrt{3x_0+1}}=\frac{3}{4} \\ \sqrt{3x_0+1}=\frac{3}{4}x_0+b \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ b=\frac{5}{4} \end{cases}$$

(x_0 – абсцисса точки касания).

Осталось найти расстояние между параллельными прямыми $y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$ и $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ (или расстояние от точки $A(1;2)$ до прямой $y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$).

Другой подход. Пусть $M(t;\sqrt{3t+1})$ – произвол. точка полупараболы $y=\sqrt{3x+1}$, а данную прямую l запишем в виде $3x-4y+25=0$. Нам надо найти длину наименьшего отрезка MN, где точка N „бегает" по прямой l. Воспользуемся тем, что расстояние от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой l: $ax+by+c=0$ вычисляется по формуле $\rho(M;l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{x^2+y^2}}$. В нашем случае $\rho(M;l)=$

$$=\frac{|3t-4\cdot\sqrt{3t+1}+25|}{5}=\frac{(\sqrt{3t+1}-2)^2+20}{5}\geqslant\frac{20}{5}=4,$$ причём

$\rho=4 \Leftrightarrow t=1$ (т.е. $M(1;2)$). Ответ: 4.