Какова последняя цифра числа

$$A = 313^{2011} - 2 \cdot 198^{2013} ?$$

Решение.

$$A = 313^3 \cdot (313^4)^{502} - 2 \cdot 198 \cdot (198^4)^{503} =$$

$$= \overline{\ldots 7} \cdot (\overline{\ldots 1})^{502} - 396 \cdot (\overline{\ldots 6})^{503} =$$

$$= \overline{\ldots 7} \cdot \overline{\ldots 1} - 396 \cdot \overline{\ldots 6} =$$

$$= \overline{\ldots 7} - \overline{\ldots 6} = \overline{\ldots 1}.$$ Ответ: 1.

Найти все $n \in \mathbb{Z}$, при которых $\frac{3n^2 + 6n + 1}{n+3} \in \mathbb{Z}$.

Решение.

$$3n - 3 + \frac{10}{n+3} \in \mathbb{Z} \iff n+3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}.$$

Отсюда находим n.

Уравнения в целых числах.

а) $xy-3y-5x+4=0$

$y(x-3)-5(x-3)-11=0$

$(x-3)\cdot(y-5)=11$ и т. д.

б) $x^2+xy-2y^2-7=0.$

$(x-y)\cdot(x+2y)=7$ и т д

в) $x^2-3y=2015$

Если $x=3n,\ n\in Z$, то $\underbrace{9n^2-3y}_{\vdots 3}=\underbrace{2015}_{\not\vdots 3}$.

Если $x=3n\pm1$, то $\underbrace{9n^2\pm6n-3y}_{\vdots 3}=\underbrace{2014}_{\not\vdots 3}$

г) (МГУ) $\cos^2 x-\cos x\cdot\sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{1}{4}=0.$

Решая это уравнение, получим уравнения в целых числах

$15k-6n=8$ и $5k-2n=1.$

При каких a и b многочлен $p(x) = ax^3 + 5x^2 - 4x - b$ нацело делится на многочлен $x^2 + 2x - 3$?

<u>I способ</u>. Поделив „уголком" первый многочлен на второй, получим остаток $(7a-14)x + (15-6a-b)$, и он должен быть тождественно равным нулю, откуда

$$\begin{cases} 7a - 14 = 0 \\ 15 - 6a - b = 0. \end{cases}$$

<u>II способ</u>. Т.к. $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$, то

$$\begin{cases} p(x) \vdots (x-1) \\ p(x) \vdots (x+3) \end{cases} \quad \begin{cases} p(1) = 0 \\ p(-3) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 1 - b = 0 \\ -27a + 45 + 12 - b = 0. \end{cases}$$

Ответ: $a = 2$, $b = 3$.

Остаток от деления многочлена $p(x)$ на $x+3$ равен -8, а на $x+1$ и на $x-1$ он делится без остатка. Найти остаток от деления $p(x)$ на x^3+3x^2-x-3.

Решение. $x^3+3x^2-x-3 = x^2(x+3)-(x+3) =$
$= (x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$.

По условию
$$\begin{array}{l|l} p(x)=(x+3)\cdot g(x)-8 & p(-3)=-8 \\ p(x)=(x+1)\cdot \varphi(x) & p(-1)=0 \\ p(x)=(x-1)\cdot t(x) & p(1)=0 \end{array}$$

($g(x)$, $\varphi(x)$, $t(x)$ — некоторые многочлены).

$$p(x)=(x+3)(x+1)(x-1)\cdot q(x)+ax^2+bx+c$$

($q(x)$ — некоторый многочлен)

Подставляем последовательно $x=-3;\ -1;\ 1$:

$$\begin{cases} -8=9a-3b+c \\ 0=a-b+c \\ 0=a+b+c \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=1. \end{cases}$$

Ответ: $-x^2+1$.

Найти a, при котором все три действител. корня уравнения $x^3+6x^2-4x+a=0$ образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни данного уравнения, причём $x_1+x_3=2x_2$ (характеристическое свойство арифметической прогрессии).

По теореме Виета для кубического уравнения

$x_1+x_2+x_3=-6$. А т.к $x_1+x_3=2x_2$, то

$$3x_2=-6, \quad x_2=-2.$$

По определению корня уравнения

$(-2)^3+6\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)+a=0$, т. е. $a=-24$.

Проверка. При $a=-24$ $x^3+6x^2-4x-24=0$

$$x^2(x+6)-4\cdot(x+6)=0$$

$$(x+6)\cdot(x+2)\cdot(x-2)=0.$$

Корни $-6, -2, 2$ образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: -24.

Найти сумму всех коэффициентов многочлена $p(x) = \left((1+\sin\alpha)\cdot x - 1\right)^2 \cdot \left((\cos\alpha + 1)\cdot x - 1\right)^2 - \left(\sin^2\alpha \cdot x^2 + 1\right)\cdot$ $\cdot\left(\cos^2\alpha \cdot x^2 - 1\right)$, приведённого к стандартному виду.

Решение. Сумма всех коэффициентов многочлена равна $p(1) = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \left(\sin^2\alpha + 1\right)\cdot\left(\cos^2\alpha - 1\right) =$ $= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1 = 2\sin^2\alpha.$

Многочлен $p(x) = \left(2x^2 - 7x + 1\right)^{16} - \left(x^9 + x^2 - 3\right)^4$ привели к каноническому виду. Чему равна сумма всех коэффициентов при чётных степенях x?

Решение. $p(x) = a_{36}\cdot x^{36} + a_{35}\cdot x^{35} + a_{34}\cdot x^{34} + \ldots + a_2\cdot x^2 + a_1 x + a_0.$

$$+\begin{array}{l} p(1) = a_{36} + a_{35} + a_{34} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 \\ p(-1) = a_{36} - a_{35} + a_{34} - \ldots + a_2 - a_1 + a_0 \\ \hline p(1) + p(-1) = 2a_{36} + 2a_{34} + \ldots + 2a_2 + 2a_0. \end{array}$$

Итак, $\sum\limits_{i=0}^{36} a_i = \dfrac{p(1) + p(-1)}{2}$

$p(1) = (2 - 7 + 1)^{16} - (1 + 1 - 3)^4 = 4^{16} - 1$

$p(-1) = (2 + 7 + 1)^{16} - (-1 + 1 - 3)^4 = 10^{16} - 81$

$$\frac{p(1) + p(-1)}{2} = \frac{4^{16} - 1 + 10^{16} - 81}{2} = \frac{2^{32} + 5\cdot 2\cdot 10^{15} - 82}{2} =$$

$$= \boxed{2^{31} + 5\cdot 10^{15} - 41}$$

Последовательность задана общим членом $a_n = \dfrac{4 - n\cdot\sin\left(\frac{8n+1}{2}\cdot\pi\right)}{4n+1}$. Начиная с какого номера n выполняется $\left|a_n + \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{180}$?

Решение. $a_n = \dfrac{4-n}{4n+1}$; $\left|\dfrac{4-n}{4n+1} + \dfrac{1}{4}\right| < \dfrac{1}{180}$;

$\dfrac{17}{4\cdot(4n+1)} < \dfrac{1}{180}$ $(n \in N)$; $n > 191$. Ответ: 192.

Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ равна $S_n = \dfrac{(0{,}5n)^2}{2011} + 2012$. Вычислить $a_{2011} + a_{2012}$.

Решение.

$$a_{2011} + a_{2012} = S_{2012} - S_{2010} =$$

$$= \left(\frac{1006^2}{2011} + 2012\right) - \left(\frac{1005^2}{2011} + 2012\right) = \frac{2011}{2011} = 1.$$

Упростить $\sqrt{3+4\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}}=A$.

Решение. $A=\sqrt{3+4\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}=\sqrt{3+4\cdot(\sqrt{3}+1)}=$

$=\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$.

Упростить $A=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на $\sqrt{2}$:

$$A=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}.$$

Т.к. $\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=\sqrt{(1\pm\sqrt{3})^2}=|1\pm\sqrt{3}|=\sqrt{3}\pm1$, то

$$A=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+(\sqrt{3}+1)}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2-(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\cdots\cdots\cdots}{6}=\frac{6\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}.$$

Вычислить x^3+9x, если $x=\sqrt[3]{1+\sqrt{28}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{28}}$.

Решение. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

$$x^3=1+\sqrt{28}+1-\sqrt{28}+3\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt{28})\cdot(1-\sqrt{28})}\cdot x.$$

$$x^3=2+3\cdot\sqrt[3]{-27}\cdot x$$

$x^3=2-9x$. Ответ: $x^3+9x=2$.

Указать все a, при которых уравнение

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}\cdot\frac{x^2+(x+3)\cdot\sqrt{x^2-2x-3}-9}{x^2-(1-x)\cdot\sqrt{x^2-2x-3}-1}=a$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Преобразуем левую часть (при $x>3$):

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}\cdot\frac{(x+3)(x-3)+(x+3)\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+1}}{(x-1)(x+1)+(x-1)\cdot\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}\cdot\frac{(x+3)\sqrt{x-3}\cdot(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1})}{(x-1)\cdot\sqrt{x+1}\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3})}=\frac{x+3}{x-1}.$$

Задача свелась к нахождению тех a, при которых уравнение $\frac{x+3}{x-1}=a$ имеет хотя бы 1 корень, бо́льший 3. А это легко сделать хоть графически, хоть аналитически. Ответ: $1<a<3$.

Найти $f(3)$, если $10\cdot f(x)+(9+\sqrt{161})\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{30}{x}$ $\forall x\neq 0$.

Решение. Полагая $x=3$ и $x=\frac{1}{3}$, получаем:

$$\begin{cases} 10\cdot f(3)+(9+\sqrt{161})\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)=10 \\ 10\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)+(9+\sqrt{161})\cdot f(3)=90. \end{cases}$$

Это линейная система относительно $f(3)$ и $f\left(\frac{1}{3}\right)$. Решая её, получим $f(3)=5$.

Решить уравнение $\sqrt{3x+9}=x+\sqrt{3}+2$. $(*)$

Решение. Заметим, что $x_1=-2$ — корень уравнения

$$(*) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{3}+2\geqslant 0 \\ 3x+9=\left(x+(\sqrt{3}+2)\right)^2. \end{cases}$$

После упрощений получим:

$$\begin{cases} x^2+(2\sqrt{3}+1)\cdot x+\underbrace{(4\sqrt{3}-2)}_{-2\cdot(1-2\sqrt{3})}=0 \\ x\geqslant -2-\sqrt{3}. \end{cases}$$

$x_1=-2$

$x_2=1-2\sqrt{3}$. Оба числа удовлетворяют неравенству $x\geqslant -2-\sqrt{3}$.

Ответ: -2; $1-2\sqrt{3}$.

Выразить $\lg 15$ через $a = \lg 6$ и $b = \lg 2$.

Решение. $a = \lg(2\cdot 3)$, т.е. $a = \lg 2 + \lg 3$

$$a = b + \lg 3$$

$$\lg 3 = a - b$$

$$\lg 15 = \lg 5 + \lg 3 = \lg \frac{10}{2} + \lg 3 = (1 - b) + (a - b) =$$

$$= a - 2b + 1.$$

Сравнить $\log_{25} 121$ и $1{,}5$.

Решение. $\log_5 11 \vee \frac{3}{2}$

$$11 \vee 5^{\frac{3}{2}}$$

$$11^2 \vee 5^3$$

$$121 < 125.$$

Ответ: первое число меньше второго.

Упростить $M = \dfrac{6^{\sqrt[5]{\log_6 25}}}{25^{\sqrt[5]{\log_{25}^4 6} - \frac{1}{2}}}$.

Решение. Пусть $a = 6^{\sqrt[5]{\log_6 25}}$, $b = 25^{\sqrt[5]{\log_{25}^4 6}}$.

$\log_6 a = \sqrt[5]{\log_6 25}$

$\log_6 b = \sqrt[5]{\log_{25}^4 6} \cdot \log_6 25 = \sqrt[5]{\dfrac{1}{\log_6^4 25} \cdot \log_6^5 25} = \sqrt[5]{\log_6 25}$.

Итак, $\log_6 a = \log_6 b$. Учитывая строгую монотонность логарифмической функции, делаем вывод, что $a = b$.

$M = \dfrac{5a}{b} = \boxed{5}$.

Упростить $A = \log_{0,5} \sin 18^\circ - \log_2 \sin 54^\circ$.

Решение. $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

$A = -\log_2 \sin 18^\circ - \log_2 \sin 54^\circ = -\log_2 (\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ) =$

$= -\log_2 \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = -\log_2 \dfrac{1}{4} = 2.$

Упростить $A = \operatorname{arctg}(\sqrt{2\sqrt{3}}-1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2\sqrt{3}}+1)$.

Решение. $A = \alpha - \beta$.

$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} =$

$= \dfrac{(\sqrt{2\sqrt{3}}-1) - (\sqrt{2\sqrt{3}}+1)}{1 + (\sqrt{2\sqrt{3}}-1)\cdot(\sqrt{2\sqrt{3}}+1)} = \dfrac{-2}{1 + 2\sqrt{3} - 1} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Т.к. $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\alpha - \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак, $\begin{cases} \operatorname{tg} A = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ A \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$, поэтому $A = -\frac{\pi}{6}$.

Решить уравнение $\cos\pi x + \cos 5\pi x = -2$.

Решение. $\begin{cases}\cos\pi x = -1\\ \cos 5\pi x = -1\end{cases}$ $\begin{cases}x = 1+2n,\ n\in Z\\ x = \dfrac{1+2k}{5},\ k\in Z\end{cases}$

Т.к серия чисел $x = \dfrac{1+2k}{5}$, $k\in Z$ содержит все числа из серии $x = 1+2n$, $n\in Z$, то решением системы является $x = 1+2n$, $n\in Z$.

Углом какой четверти является α, если

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2} - 3\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2} - 5\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = 2 \ ?$$

Решение. $\cos\frac{\alpha}{2} - 3\sin\frac{\alpha}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2} - 10\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

$7\sin\frac{\alpha}{2} = 3\cos\frac{\alpha}{2}$; $tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{7}$.

$\alpha = 2arctg\,\frac{3}{7} + \underbrace{2\pi n}_{\text{не влияет на четверть!}},\ n\in Z$.

Т.к. $0 < arctg\,\frac{3}{7} < arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$, то $2arctg\,\frac{3}{7} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$,

а значит α – угол I четверти.

Упростить $\cos(\operatorname{arcctg}(-3))$.

Решение. Пусть $\alpha = \operatorname{arcctg}(-3)$.

Надо найти $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -3$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

По формуле $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ находим $\sin^2\alpha = \frac{1}{10}$.

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Упростить $\arcsin(\sin 3{,}2\pi)$.

Решение. $\arcsin(\sin 3{,}2\pi) = \arcsin(\sin 1{,}2\pi) =$

$= \arcsin\left(\sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{5}\right) =$

$= -\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}.$

Упростить $A = \arcsin\left(\cos\frac{9\pi}{8}\right) + \arccos\left(\sin\frac{9\pi}{8}\right)$.

Решение. Будем пользоваться формулами:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1; 1]$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad \forall x \in [-1; 1]$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \forall x \in [-1; 1]$$

$A = \arcsin\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right) + \arccos\left(-\sin\frac{\pi}{8}\right) =$

$= \left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{8}\right)\right) =$

$= \left(\frac{\pi}{2} - \left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$

Решить уравнение $\arccos(\cos 2x) = x$ (*).

Решение. По определению арккосинуса

$$(*) \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ \cos x = \cos 2x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Найти количество различных корней уравнения

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\sqrt{(x+5{,}5)\cdot(40\sin x - \sqrt{80}\cdot\cos x - 41)\cdot(x-140)} = 0 \quad (\bigstar)$$

Решение. Как известно, $|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

У нас $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{40^2+(-\sqrt{80})^2} = \sqrt{1680} < \sqrt{1681} = 41$.

Итак, $40\sin x - \sqrt{80}\cdot\cos x - 41 < 0 \quad \forall x \in R$.

С учётом этого получаем, что

$$(\bigstar) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\frac{\pi x}{2} = 0 \\ (x+5{,}5)\cdot(x-140) \leqslant 0 \end{cases} \\ (x+5{,}5)\cdot(x-140) = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2n,\ n \in Z \\ x \in (-5{,}5; 140) \end{cases} \\ x = -5{,}5 \\ x = 140 \end{array}\right.$$

Решением системы являются числа

$-4; -2; 0; 2; \ldots; 138$, всего их 72.

Вместе с корнями $-5{,}5$ и 140 получается $\boxed{74}$.

Найти множество значений функции

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\ln\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)' \text{ при } x\in\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right).$$

Решение. Нахождение производной будет проще, если логарифм частного заменить на разность логарифмов. При этом важно учесть, что, т. к. $-\frac{\pi}{6}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{6}$, то $-\frac{1}{\sqrt3}<\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\frac{1}{\sqrt3}$ и $\frac{1}{\sqrt3}\pm\operatorname{tg}\frac{x}{2}>0$!

$$\sqrt3\cdot\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt3}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\ln\left(\frac{1}{\sqrt3}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right)'=$$

$$=\sqrt3\cdot\left(\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac12}{\frac{1}{\sqrt3}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-\frac{-\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac12}{\frac{1}{\sqrt3}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt3}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt3}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt3}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)=\frac{\sqrt3}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt3}}{\frac13-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\frac13\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{3}{4\cos^2\frac{x}{2}-3}.$$

$$\frac{\sqrt3}{2}<\cos\frac{x}{2}\leqslant1$$

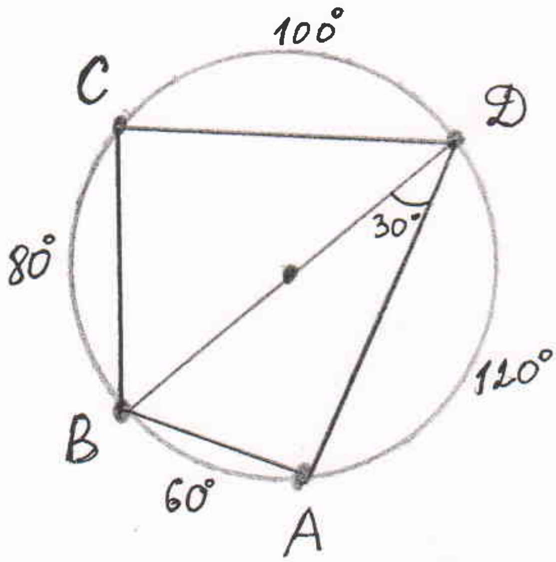
$$\frac34<\cos^2\frac{x}{2}\leqslant1$$

$$0<4\cos^2\frac{x}{2}-3\leqslant1.$$

$\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}-3}$ принимает все значения из $[1;+\infty)$

Ответ: $[3;+\infty)$.

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $\dfrac{\sqrt{2}}{\cos 10^\circ \cdot \cos 5^\circ}$ так, что величины дуг AB, BC, CD, AD пропорциональны числам 3, 4, 5, 6. Найти периметр $ABCD$.



Решение. $\dfrac{AB}{\sin 30^\circ} = 2R$

$\dfrac{BC}{\sin 40^\circ} = 2R$

$\dfrac{CD}{\sin 50^\circ} = 2R$

$\dfrac{AD}{\sin 60^\circ} = 2R$

$$P_{ABCD} = \underline{2R\cdot\sin 30^\circ} + \underline{\underline{2R\cdot\sin 40^\circ + 2R\cdot\sin 50^\circ}} + \underline{2R\cdot\sin 60^\circ} =$$

$$= 2R\cdot\left(\left(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ\right) + \left(\sin 50^\circ + \sin 40^\circ\right)\right) =$$

$$= 2R\cdot\left(2\sin 45^\circ\cdot\cos 15^\circ + 2\sin 45^\circ\cdot\cos 5^\circ\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\cdot R\cdot\left(\cos 15^\circ + \cos 5^\circ\right) = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\cos 10^\circ\cdot\cos 5^\circ}\cdot 2\cos 10^\circ\cdot\cos 5^\circ =$$

$$= 8.$$