УДК 517.929 + 330.4

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

© **А. Л. Чадов**

Ключевые слова: непрерывно-дискретные модели, гибридные модели, доказательный вычислительный эксперимент, задачи управления.

Аннотация: Рассматривается непрерывно-дискретная система функционально-дифференциальных уравнений. Отличительной особенностью системы является наличие фазовых компонент как с непрерывным, так и с дискретным временем и постоянного запаздывания. Для рассматриваемой модели ставится задача управления в классе дискретных управлений с последействием и формулируются условия ее разрешимости в форме, допускающей проведение доказательного вычислительного эксперимента. Обсуждаются детали компьютерной реализации алгоритмов.

Непрерывно-дискретная модель, рассматриваемая в работе, является конкретной реализацией так называемого абстрактного функционально-дифференциального уравнения [1, 2]. Конкретный пример такой модели, возникающей в задачах экономической динамики, рассматривается в [3]. Отличительной особенностью системы является наличие фазовых компонент как с непрерывным, так и с дискретным временем [4, 5].

Зафиксируем множество $J=\{t_0,\, t_1, \ldots, t_{\mu+1}\}, \quad 0=t_0<t_1<\ldots<t_\mu<t_{\mu+1}=T$ и рассмотрим непрерывно-дискретную систему с дискретным управлением [6, 7]

$$\begin{cases} \dot{x}(t)-\int\limits_0^t K(t,\,s)\,\dot{x}(s)\,ds = A_0x(0)+A_\tau x(t-\tau)+\sum\limits_{j:t_j<t} F_j(t)y(t_j)+f(t),\ t\in[0,\,T], \\ y(t_i)-\sum\limits_{j=0}^{i-1} B_{ij}y(t_j)=\sum\limits_{j=1}^{i} H_{ij}v(t_j)+g(t_i),\ i=1,\,2,\ldots,\,\mu+1; \end{cases} \tag{1}$$

с заданными начальным состоянием:

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0, \tag{2}$$

и предысторией: $x(\xi)=\varphi(\xi),\ \xi\in[-\tau,\,0)$. Здесь F_j — $(n\times\nu)$- матрицы, элементы которых суть суммируемые функции, A_0, A_τ, B_{ij} и H_{ij} — постоянные $(n\times n)$-, $(n\times n)$-, $(\nu\times\nu)$- и $(\nu\times m)$- матрицы соответственно, $H_{\mu+1,\,j}=0\ \forall j=1,\ldots,\mu+1$. Элементы $k_{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s):\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$ и таковы, что на этом множестве $|k_{ij}(t,s)|\leqslant\kappa(t),\ i,j=1,\ldots,n$, где функция κ суммируема на $[0,\,T]$. Функция $f:[0,\,T]\to R^n$ — суммируема на $[0,\,T]$, $g:J\to R^\nu$ — заданная функция.

Обозначим $V=\mathrm{col}\big(v(t_1),\cdots,v(t_\mu)\big)$ и сформулируем задачу управления как задачу приведения системы (1) в заданное конечное состояние

$$x(T)=x_{T}, \quad y(T)=y_{T}. \tag{3}$$

Под управлением, решающим задачу $(1)-(3)$, будем понимать такой вектор V_0, при котором система (1) имеет решение (x,y), $x\in AC^n[0,\,T]$, $y=\mathrm{col}\big(y(t_0),\cdots,y(t_{\mu+1})\big)$, обращающее ее уравнения в равенства и удовлетворяющее условиям $(2)-(3)$. Здесь $AC^n[0,\,T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,\,T]\to R^n$.

Пусть $C_1(\cdot,\cdot)$ и $X(\cdot)$ — матрица Коши [8] и фундаментальная матрица линейного оператора

$$(\mathcal{L}_1x)(t)\equiv\dot{x}(t)-\int\limits_0^t K(t,\,s)\,\dot{x}(s)\,ds-A_\tau x(t-\tau)\chi_{[\tau,\,T]}(t)$$

соответственно; $C_2(\cdot,\cdot)$ и $Y(\cdot)$ — матрица Коши [9] и фундаментальная матрица линейного оператора

$$(\mathcal{L}_2 y)(t_i) \equiv y(t_i) - \sum_{j=0}^{i-1} B_{ij} y(t_j).$$

Определим матрицы W_1 и W_2 равенствами

$$W_1 V = \int_0^T C_1(T,s) \sum_{j:t_j<s} F_j(s) \sum_{k=1}^{j} C_2(j,k) \sum_{l=1}^{k} H_{kl} v(t_l)\, ds,$$

$$W_2 V = \sum_{j=1}^{\mu+1} C_2(\mu+1,j) \sum_{k=1}^{j} H_{jk} v(t_k).$$

Введем обозначения

$$f_2(T) \stackrel{\text{def}}{=} X(T)x_0 + \int_0^T C_1(T,s)\big(f(s) + \varphi(s-\tau)\chi_{[0,\tau]}(s)\big)\, ds, + \int_0^T C_1(T,s) \sum_{k=1}^{j} C_2(j,k) g(t_k)\, ds,$$

$$f_3(T) \stackrel{\text{def}}{=} Y(T)y_0 + \sum_{j=1}^{\mu+1} C_2(\mu+1,j) g(t_j).$$

и сформулируем теорему о разрешимости задачи управления $(1)-(3)$.

Т е о р е м а *Задача управления* $(1)-(3)$ *разрешима тогда и только тогда, когда система линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} x_T - f_2(T) \\ y_T - f_3(T) \end{pmatrix} \tag{4}$$

разрешима относительно вектора V. *Каждое решение* V_0 *системы* (4) *порождает управление, решающее эту задачу.*

Обсуждаются детали проведения доказательного вычислительного эксперимента (см. [1], гл. VI) для исследования разрешимости поставленной задачи и, в случае ее разрешимости, построения управления и соответствующей траектории с использованием программного пакета Maple.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений, М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.

2. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.

3. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Дискретное управление функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системой // Вестник Пермского университета. Экономика. 2013. № 1. С. 6-11.

4. *Agranovich G.A.* Observability criteria of linear discrete-continuous system // Functional Differential Equations, 16, 2009, No. 1, pp.35-51.

5. *Chadov A.L., Maksimov V.P.* Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. 2012. V. 19, №1-2.P. 49-62.

6. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Экономика. 2011. № 2. С. 13-23.

7. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 9. С. 72-76.

8. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13, №4. С. 601-606.

9. *Андрианов Д.Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 3-16.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-96054) и компании «Прогноз».

Aleksei Chadov

Reliable computing experiment for a continuous-discrete model

Abstract: A continuous-discrete system of functional-differential equations is considered. The main feature of the system under consideration is the presence of both continuous time and discrete time in the state variables and constant delay. The problem of control in the case of only discrete control with aftereffect is formulated. Necessary and sufficient conditions for the solvability of this problem are obtained in the form oriented to reliable computing experiment. Some details of computer implementation of the proposed approach are discussed.

Key words: discrete-continuous systems, hybrid systems, control problems, reliable computing experiment.

Чадов Алексей Леонидович, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Россия, г. Пермь, ул. Студенческая, 38, старший преподаватель кафедры прикладной математики и математического моделирования в социальных системах, email: alchadov20@gmail.com.